1. Consideriamo i seguenti tre punti nello spazio:

$$A = (1,2,3), \qquad B = (4,5,6), \qquad C = (7,7,7).$$

(a) Determinare l'area del triangolo ABC.

(b) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice A.

(a) $B - A = (3,3,3) \qquad C - A = (6,5,4)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-3, 6, -3)$$

[Verifica che è $\perp$]

$\rightsquigarrow$ Area $= \frac{1}{2} \|(-3,6,-3)\| = \frac{3}{2} \|(-1,2,-1)\| = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{6}}$

(b) Retta $BC = (7,7,7) + t(3,2,1) = (7+3t, 7+2t, 7+t) = P$

$P - A = (6+3t, 5+2t, 4+t)$

Impongo $P - A \perp B - C$ e ottengo

$18 + 9t + 10 + 4t + 4 + t = 0 \rightsquigarrow 14t = -32 \rightsquigarrow t = -\frac{16}{7}$

Sostituendo in P trovo $\boxed{H = \left(\frac{1}{7}, \frac{17}{7}, \frac{33}{7}\right)}$

Utile verifica: $A - H = \left(-\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{12}{7}\right) = \frac{3}{7}(-2,1,4)$ e quindi

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \|(3,2,1)\| \cdot \frac{3}{7} \|(-2,1,4)\|$$

$$= \frac{3}{14} \sqrt{14}\sqrt{21} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$$

Alternativa per calcolare H: intersecare la retta BC con il piano perpendicolare a BC e passante per A.

— o — o —

2. Consideriamo, nello spazio, la retta r di equazione

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4, \\ 2x - z = 3, \end{cases}$$

ed il piano π di equazione $ax + y + z = b$.

(a) Determinare, al variare dei parametri reali a e b, il numero di intersezioni tra la retta r ed il piano π.

(b) Nei casi in cui le intersezioni sono infinite, descrivere parametricamente l'insieme delle intersezioni.

Si tratta di risolvere il sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ a & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$

Det matrice coeff. $= a + 6 + 2 + 1 = a + 9$.

Se $a \neq -9$, il sistema ha soluz. unica.

Se $a = -9$, il sistema diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -9 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$

Guardo il Det eliminando la 1ª colonna:

$b + 9 + 4 + 3 = 0 \iff b = -16$

Quindi: se $a \neq -9$ e b qualunque $\rightsquigarrow$ r e π sono incidenti

se $a = -9$ e $b \neq -16$ $\rightsquigarrow$ r e π sono paralleli e disgiunti

se $a = -9$ e $b = -16$ $\rightsquigarrow$ r è contenuta dentro π

(b) Infinite intersezioni si hanno per $a = -9$ e $b = -16$. Le intersezioni sono tutti i p.ti di r. Per parametrizzarla risolviamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & -5 \end{array}\right)$$

$z = t$, $y = -\frac{5}{2} + \frac{7}{2} z = -\frac{5}{2} + \frac{7}{2} t$

$x = 4 + y - 3z$

$= 4 - \frac{5}{2} + \frac{7}{2} t - 3t = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} t$

$$(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right) + t\left(+\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 1\right) = \boxed{\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right) + t(1, 7, 2)}$$

sol. non omog. sol. omog.

[Verifica a mente]

— o — o —

3. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Consideriamo l'applicazione lineare da $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ in $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ definita da

$$p(x) \to p(2x) - p(2) \cdot x^2.$$

(a) Determinare nucleo e immagine dell'applicazione.

(b) Determinare la forma canonica dell'applicazione, ed una base nella quale la matrice associata all'applicazione assume tale forma.

$$a+bx+cx^2+dx^3 \longrightarrow a+2bx+4cx^2+8dx^3-(a+2b+4c+8d)x^2$$
$$= a+2bx-(a+2b+8d)x^2+8dx^3$$

La matrice associata nella base $1, x, x^2, x^3$ è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) È immediato che

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Ker} = \mathrm{Span}(x^2) \\ \mathrm{Im} = \mathrm{Span}(1-x^2,\ x-x^2,\ x^3-x^2) \end{array}}$$

immagine el. base canonica

(b) Il polinomio caratteristico è

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-8)$$

dunque l'applicazione è diagonalizzabile con autovalori $0, 1, 2, 8$.
Gli autovettori si trovano immediatamente risolvendo

$p(x) \to p(x)$: $1-x^2$ $\quad$ $p(x) \to 2p(x)$: $x-x^2$ $\quad$ $p(x) \to 8p(x)$: x^3-x^2

Di conseguenza la forma canonica è

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}$$

con possibile base diagonalizzante

$$\boxed{x^2,\ 1-x^2,\ x-x^2,\ x^3-x^2}$$

Sarebbe utile fare la verifica

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Consideriamo il prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & a & 1 \\ a & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali valori del parametro reale a il prodotto scalare risulta definito positivo.

(b) Nel caso particolare $a = 0$, determinare una base ortogonale (rispetto a questo prodotto scalare) del sottospazio di equazione $x + y - z = 0$ costituita da vettori a coordinate intere.

$$\begin{pmatrix} 3 & a & 1 \\ a & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Sylvester 3-2-1: $\mathrm{Det}_{1\times 1} = 5$, $\mathrm{Det}_{2\times 2} = 16$

Quindi è definita positiva $\iff \mathrm{Det}_{3\times 3} > 0$, cioè

$60 + 2a + 2a - 4 - 5a^2 - 12 > 0 \iff 5a^2 - 4a - 44 < 0$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+220}}{5} = \frac{2 \pm 4\sqrt{14}}{5}$$

$$\boxed{\frac{2-4\sqrt{14}}{5} < a < \frac{2+4\sqrt{14}}{5}}$$

(b) Per $a=0$ abbiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Una base del sottospazio è $\underset{v_1}{(1,0,1)}, \underset{v_2}{(0,1,1)}$.
Si tratta ora di ortogonalizzarla

$$w_1 = v_1, \qquad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$$

$$= (0,1,1) - \frac{8}{10}(1,0,1) = \left(-\frac{4}{5}, 1, \frac{1}{5}\right)$$

$$\langle w_1, w_1\rangle = w_1^t A w_1 = (1,0,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 10$$

$$\langle v_2, w_1\rangle = v_2^t A w_1 = (0,1,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 8$$

Una possibile base ortogonale è $\boxed{(1,0,1),\ (-4,5,1)}$

— o — o —