1. Consideriamo i seguenti cinque punti nello spazio:

$$A = (0, 1, 0), \qquad B = (1, 1, 0), \qquad C = (1, 2, 3), \qquad D = (0, 0, 1), \qquad E = (-1, 0, -2).$$

(a) Determinare il punto di intersezione tra il piano passante per A, B e C e la retta passante per D ed E.

(b) Determinare l'angolo formato dalla retta e dal piano del punto precedente.

10/01/2019

Piano ABC in forma parametrica: $\underbrace{(0,1,0)}_{A} + t\underbrace{(1,0,0)}_{B-A} + s\underbrace{(1,1,3)}_{C-A}$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0,-3,1) \rightsquigarrow \boxed{3y - z = 3}$$

perp. a B−A e C−A

(equazione del piano per A, B, C in forma cartesiana)

Retta DE in forma parametrica: $\underbrace{(0,0,1)}_{D} + t\underbrace{(1,0,3)}_{D-E} = \boxed{(t, 0, 1+3t)}$

Sostituendo nella cartesiana del piano: $-1-3t = 3 \rightsquigarrow t = -\frac{4}{3}$

Punto di intersezione: $\boxed{\left(-\frac{4}{3}, 0, -3\right)}$

Angolo compreso $= 90° -$ angolo tra $\underbrace{(0,3,-1)}_{\perp \text{ piano}}$ e $\underbrace{(1,0,3)}_{\text{dir. retta}}$

$$= 90° - \arccos \frac{|\langle (0,3,-1), (1,0,3) \rangle|}{\|(0,3,-1)\| \cdot \|(1,0,3)\|} = \boxed{90° - \arccos \frac{3}{10} = \arcsin \frac{3}{10}}$$

— o — o —

Achtung! L'angolo deve venire tra 0° e 90°, quindi non può essere arcsin o arccos di roba negativa.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 7, \\ 3x + ay + 4z = 8, \\ 3x + y + 2z = b. \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori reali di a e b il sistema ammette soluzione unica.

(b) Determinare per quali valori reali di a e b il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 7 \\ 3 & a & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & b \end{array}\right)$$

(a) Il sistema ammette sol. unica $\iff$ la matrice incompleta ha rango 3 $\iff$

$2a^2 + 12 + 6 - 6a - 6 - 4a \neq 0$

$\iff a^2 - 5a + 6 \neq 0 \iff \boxed{a \neq 2,3}$

(qualunque sia b)

(b) Occorre discutere i casi $a=2$ e $a=3$

$\boxed{a=2}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & b \end{array}\right)$ Per avere ∞ sol. la matrice completa deve avere rango 2. Visto che la 3ª colonna è il doppio della 2ª, basta fare il det eliminando la 3ª

$4b + 24 + 21 - 42 - 3b - 16 = 0 \iff b = 13$

Quindi per $\boxed{a=2 \text{ e } b=13}$ otteniamo il sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$z = t, \quad y = -5-2t$

$x = -\frac{1}{2}y - z + \frac{7}{2} =$

$= \frac{5}{2} + t - t + \frac{7}{2} = 6$

$\rightsquigarrow \boxed{(x,y,z) = (6,-5,0) + t(0,-2,1)}$

$\boxed{a=3}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & b \end{array}\right)$ Imponiamo l'annullamento del Det della matrice ottenuta eliminando la 1° colonna (C.L. di 2ª e 3ª)

$4b + 16 + 42 - 28 - 6b - 16 = 0 \iff 2b = 14$

Quindi per $\boxed{a=3 \text{ e } b=7}$ otteniamo il sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 4 & 8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$z = t, \quad y = \frac{1}{2} - z = \frac{1}{2} - t$

$3x = 7 - y - 2z = 7 - \frac{1}{2} + t - 2t$

$x = \frac{13}{6} - \frac{t}{3}$

$\rightsquigarrow (x,y,z) = \left(\frac{13}{6}, \frac{1}{2}, 0\right) + t\left(-\frac{1}{3}, -1, 1\right) = \boxed{\left(\frac{13}{6}, \frac{1}{2}, 0\right) + t(1,3,-3)}$

— o — o —

3. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$$

ed il sottospazio V generato dal vettore $(3, 2, 1)$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

(b) Determinare le componenti del vettore $(1, 1, 1)$ rispetto a tale somma diretta.

(c) Determinare la matrice che, rispetto alla base canonica, rappresenta la proiezione su W in tale somma diretta.

(a) Basta verificare che $(3,2,1) \notin W$ e concludere con Grassmann.

(b) Una base di W è $(3,0,-1), (2,-1,0)$. Scriviamo quindi

$(1,1,1) = a(3,0,-1) + b(2,-1,0) + c(3,2,1)$.

Risolvendo il sistema troviamo $a = -\frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$, $c = \frac{3}{5}$.

Quindi le componenti sono

$$-\frac{2}{5}(3,0,-1) + \frac{1}{5}(2,-1,0) = \boxed{\left(-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)} \qquad \boxed{\left(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)}$$

(rispetto a W) (rispetto a V)

(c) Poniamo $v_1 = (3,0,-1)$, $v_2 = (2,-1,0)$, $v_3 = (3,2,1)$

Nella base v_1, v_2, v_3 la matrice della proiezione su W è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Nella base canonica la matrice sarà quindi

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Cambio base } \{v_1,v_2,v_3\} \to \text{canonica}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Cambio base canonica} \rightsquigarrow \{v_1,v_2,v_3\}}$$

Svolgendo il calcolo (l'unica seccatura è calcolare l'inversa) troviamo la matrice

$$\boxed{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}}$$

[Verificare che moltiplicando per $(1,1,1)$ venga il risultato del punto (b)]

4. (a) Scrivere l'espressione della simmetria centrale rispetto al punto $(3, 2)$ del piano.

(b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta $y = 2x$ rispetto a tale simmetria.

(a) $(x,y) \xrightarrow[\text{sposto origine}]{} (x-3, y-2) \xrightarrow[\text{simm. centrale risp. origine}]{} (3-x, 2-y) \xrightarrow[\text{ri-sposto origine}]{} (6-x, 4-y)$

L'espressione è $\boxed{(x,y) \to (6-x, 4-y)}$

(b) Scrivo la retta in parametrica $t(1,2) = (t, 2t)$

Sostituisco $\rightsquigarrow$ $(6-t, 4-2t)$ (retta immagine in parametrica)

Torno in cartesiana $\begin{cases} 6-t = x \\ 4-2t = y \end{cases}$ $\quad t = 6-x$

$y = 4-2t = 4-12+2x = 2x-8$

$\boxed{y = 2x-8}$

— o — o —

Alternativa bovina per punto (b): trovare l'immagine di due p.ti a caso della retta, poi trovare la retta nuova che passa per le due immagini.

— o — o —