Soluzione scritto5

FApples97

11 settembre 2018

1 Esercizio1

Let us consider the functional $F(u) = \int_0^3 (u''^2 + 3u)dx$.

- (a) Discuss the minimum problem for F(u) with boundary conditions $u(0) = u'(0) = 0$.
- (b) Discuss the minimum problem for F(u) with boundary conditions $u(0) = 0$.

Soluzione di a:
Sia u punto di minimo di F. Sia $V =: \{v \in C^\infty([0,3]) : v(0) = v'(0) = 0\}$ e sia $v \in V$. Allora:

$$0 = \delta F(u,v) = \int_0^3 (2u''v'' + 3v)dx = \int_0^3 (-2u^{(3)}v' + 3v)dx + [2u''v']_0^3 =$$
$$\int_0^3 (2u^{(4)} + 3)v + [2u''v']_0^3 - [2u^{(3)}v]_0^3 = \int_0^3 (2u^{(4)} + 3)v + 2u''(3)v'(3) - 2u^{(3)}(3)v(3)$$

Soffermandoci ora sulle $v \in C_c^\infty((0,1))$ e dal LEMMA FLCV risulta $2u^{(4)} + 3 = 0$. Tornando all'eq. precedente e soffermandoci sulle $v \in V$ tali che $v'(3) = 0$ e $v(3) = 1$ otteniamo che $u^{(3)}(3) = 0$; analogamente otteniamo che $u''(3) = 0$.
Dunque riassumendo abbiamo:
$2u^{(4)} + 3 = 0$
$u''(3) = 0$
$u^{(3)}(3) = 0$
$u(0) = 0$
$u'(0) = 0$
Risolvendo otteniamo che $u(x) = -\frac{3}{48}x^4 + \frac{9}{12}x^3 - \frac{27}{8}x^2$.
Proviamo ora che u è unico punto di minimo:
Sia w un altro competitore e poniamo $v := w - u$ e osserviamo che $v \in V$. Allora:
$F(w) = F(u+v) = F(u) + \int_0^3 (2u''v'' + 3v)dx + \int_0^3 v''^2 dx = F(u) + \int_0^3 v''^2 dx$ per la prima forma integrale di ELE; dunque $F(w) \geq F(u)$ e $F(w) = F(u) \Leftrightarrow v'' = 0$ e dato che $v \in V$ si conclude che $v = 0$ e dunque $w = u$. Riassumendo u è l'unico punto di minimo.
Soluzione di b:
Consideriamo la successione di funzioni $u_n(x) = -nx$ che rispettano $u_n(0) = 0$.
Si ha $F(u_n) = -\frac{27}{2}n$ che tende a $-\infty$. Dunque il min non esiste e l'inf è $-\infty$.

2 Esercizio2

2. Discuss existence, uniqueness and regularity of the solution to the boundary value problem:

$$u'' = senh(x+u)$$
$$u'(0) = 0$$
$$u'(1) = 7.$$

Soluzione: Consideriamo il cambio di variabili $v(x) := u(x) - \frac{7}{2}x^2$. Si ha $v'(0) = 0$, $v'(1) = 0$ e:

$$v'' + 7 = u'' = senh(x+u) = senh(x + \tfrac{7}{2}x^2 + v).$$

Riassumendo si ha:

$$v'' = -7 + senh(x + \tfrac{7}{2}x^2 + v)$$
$$v'(0) = 0$$
$$v'(1) = 0.$$

Consideriamo la lagrangiana $L(x,s,p) = \frac{p^2}{2} - 7s + cosh(x + \frac{7}{2}x^2 + s)$ e osserviamo che da $L_p' = L_s$ otteniamo la nostra eq. differenziale. Osserviamo da $L_p = 0$ calcolata in $x = 0$ e in $x = 1$ che le condizioni $v'(0) = 0$ e $v'(1) = 0$ nasceranno "on the road".
1)Ambientazione:
Sia $F(u) = \int_0^1 L(x,u,u')dx$. Consideriamo il problema di minimo: $min\{F(u) : u \in H^1\}$ dove tutte le derivate sono derivate deboli.
2)Compattezza:
Voglio dimostrare che i sottolivelli $\Gamma_M := \{u : F(u) \leq M, u \in H^1\}$ sono compatti rispetto alla solita nozione di convergenza (uniforme sulle funzioni e debole sulle derivate). Presa una successione u_n contenuta in Γ_M devo dimostrare che esiste una sottosuccessione che converge ad una funzione in Γ_M. Si ha:

$$M \geq F(u_n) \geq \int_0^1 (\frac{u_n'^2}{2} - 7u_n)dx \;;(1)$$

Inoltre abbiamo una limitazione sulla funzione perchè:

$$M \geq F(u_n) \geq \int_0^1 -7u_n + cosh(x + \tfrac{7}{2}x^2 + u_n)dx$$

Da cui per il teorema della media integrale esiste x_n ed esiste M_2 tale che: $-7u_n(x_n) + cosh(x_n + \frac{7}{2}x_n^2 + u_n(x_n)) \leq M_2$. Da cui, dato che x_n è in $(0,1)$, risulta che esiste M_4 per cui $|u_n(x_n)| \leq M_4$. Inoltre:

$$|u_n(x)| \leq |u_n(x) - u_n(x_n)| + M_4 \leq ||u_n'||\sqrt{|x - x_n|} + M_4 \leq ||u_n'|| + M_4 \;;(2)$$

Da cui tornando alla (1) risulta

$$M \geq \int_0^1 (\frac{u_n'^2}{2} - 7u_n)dx \geq \frac{||u_n'||^2}{2} - 7(||u_n'|| + M_4)$$

da cui si ottiene che esiste M_1 per cui $||u'_n|| \leq M_1$. Da cui per il "teorema di compattezza debole delle palle chiuse" esiste una estratta n_k tale che u'_{n_k} converge debolmente in L^2 a una certa v_∞. E da (2) si ha che $|u_n(x)| \leq M_1 + M_4$. Per cui abbiamo equilimitatezza ed equicontinuità (l'equicontinuità segue dalla equi-holderianità che segue dalla limitazione sulla norma delle derivate), perciò possiamo applicare Ascoli Arzelà su u_{n_k} e otteniamo una nuova estratta $u_{n_{k_j}}$ che converge uniformemente a una certa u_∞.
Dimostiamo che $u'_\infty = v_\infty$:
Si ha $\forall\ \phi \in C_c^\infty((0,1))$ che (sfruttando la convergenza uniforme e debole):

$$\int_0^1 u_\infty \phi' = \lim_{j\to\infty} \int_0^1 u_{n_{k_j}} \phi' = \lim_{j\to\infty} \int_0^1 u'_{n_{k_j}} \phi = \int_0^1 v_\infty \phi$$

da cui si deduce che $u'_\infty = v_\infty$.
Resta da dimostrare che $u_\infty \in \Gamma_M$:
$u_\infty \in H^1$ perchè ammette derivata debole e inoltre $F(u_\infty) \leq M$ perchè $F(u_\infty) \leq \liminf_{j\to\infty} F(u_{n_{k_j}}) \leq M$ (in quanto F è SCI rispetto a tale nozione di convergenza: vedere parte3).
Da ciò concludiamo che esiste estratta $u_{n_{k_j}}$ tale che $u_{n_{k_j}}$ tende unif. a u_∞ e $u'_{n_{k_j}}$ tende debolmente in L^2 a u'_∞; cioè $u_{n_{k_j}}$ tende a $u_\infty \in \Gamma_M$ rispetto alla solita nozione di convergenza. Dunque Γ_M è compatto.
3)Semicontinuità:
Sia u_n che tende a u_∞ secondo la solita nozione di convergenza, vogliamo dimostrare che $\liminf_{n\to\infty} F(u_n) \geq F(u_\infty)$. Dato che $\phi(p) := \frac{p^2}{2}$ è convessa in p e u'_n converge debolmente a u'_∞, si ha che $\liminf_{n\to\infty} \int_0^1 \phi(u'_n(x))dx \geq \int_0^1 \phi(u'_\infty(x))dx$
Inoltre $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 -7u_n(x) + cosh(x + \frac{7}{2}x^2 + u_n(x))dx = \int_0^1 -7u_\infty + cosh(x + \frac{7}{2}x^2 + u_\infty)dx$ per la convergenza uniforme delle u_n. Dunque tenendo conto di questi ultimi due risultati si ha che $\liminf_{n\to\infty} F(u_n) \geq F(u_\infty)$.
4)Regolarità:
Dai primi 3 punti segue che F ammette punto di minimo u in H^1. Dunque si ha $\forall\ v \in C^\infty$ che:

$$\begin{gathered} 0 = \delta F(u,v) = \int_0^1 (u'v' - 7v)dx + \frac{d}{dt}[\int_0^1 (cosh(x + \tfrac{7}{2}x^2 + u + tv)dx]_{t=0} = \\ \int_0^1 (u'v' - 7v) + senh(x + \tfrac{7}{2}x^2 + u)vdx \ ;(3) \end{gathered}$$

(abbiamo potuto commutare integrale e derivata perchè $senh(x + \frac{7}{2}x^2 + u + tv)v$ è composizione di funzioni continue in quanto v è continua e u è continua in quanto è in H^1).
Da cui soffermandoci sulle $v \in C_c^\infty((0,1))$ capiamo che:

$$(u')' = -7 + senh(x + \tfrac{7}{2}x^2 + u)dx$$

Da cui dato che u è in H^1 allora è continua e allora RHS è continuo e dunque u' ha derivata debole continua e dunque u' è C^1 e quindi u è C^2. Da qui RHS è C^2, quindi u'' è C^2 ecc.. fino ad ottenere che $u \in C^\infty$.
Al solito modo, tornando alla (3), si ottiene che u soddisfa $u'(0) = u'(1) = 0$.

5) Unicità:

L'unicità del punto di minimo di F segue dalla stretta convessità di L in (s,p) per ogni x. Si ha inoltre che ogni punto di minimo di F è soluzione di ELE. Viceversa, dalla convessità di L, segue che ogni soluzione di ELE è punto di minimo per F.

Dunque esiste una unica v liscia tale che

$$\begin{gathered} v'' = -7 + senh(x + \tfrac{7}{2}x^2 + v) \\ v'(0) = 0 \\ v'(1) = 0. \end{gathered}$$

cioè esiste una unica u liscia (ricordiamo che $v(x) = u(x) - \frac{7}{2}x^2$) tale che:

$$\begin{gathered} u'' = senh(x + u) \\ u'(0) = 0 \\ u'(1) = 7. \end{gathered}$$

3 Esercizio3

3. Let us consider, for every $l > 0$, the problem

$I(l) = inf\{\int_0^l \{tanh(u'^2) + arctan(u^3 - u^2)\}dx : u \in C^1(0,l)$, u(0)=0, u(l)=0 }

- (a) Determine for which values of l the function $u_0(x) \equiv 0$ is a weak local minimum.
- (b) Determine for which values of l the function $u_0(x) \equiv 0$ is a strong local minimum.
- (c) Compute the infimum as a function of l.

Soluzione:
Sia F il funzionale.
Soluzione di a:
Si ha che u_0 verifica ELE. Inoltre si ha che soddisfa (L^+) perchè $L_{pp}(x, 0, 0) = 2$. Inoltre si ha che la variazione seconda di F calcolata in u_0 è $Q_l(v) = 2\int_0^l (v'^2 - v^2)dx$, da cui calcolando (JDE) con le condizioni $v(0) = 0$ e $v'(0) = 1$ risulta che $v(x) = sen(x)$. La condizione (J) non è verificata per $l > \pi$.
Dunque per $l > \pi$ non è WLM.
Per $l < \pi$, sono soddisfatte le condizioni (E), $(J+)$ e $(L+)$ e dunque u_0 è WLM.
Per $l = \pi$, consideriamo le funzioni $u_\epsilon(x) := -\epsilon sen(x)$. Si ha: (intendendo che l'o-piccolo è anche una funzione di x)

$$F(u_\epsilon) = \int_0^\pi \epsilon^2 cos^2(x) - \epsilon^3 sen^3(x) - \epsilon^2 sen^2(x) + o(\epsilon^4)dx = \\ \epsilon^3\{-\int_0^\pi sen^3(x)dx + \epsilon\int_0^\pi \frac{o(\epsilon^4)}{\epsilon^4}dx\}$$

Per ϵ abbastanza piccolo si ha che $|\epsilon\int_0^\pi \frac{o(\epsilon^4)}{\epsilon^4}dx\}| < \frac{1}{2}\int_0^\pi sen^3(x)dx$ e dunque per ϵ abbastanza si ha che $F(u_\epsilon) < 0$. Inoltre, fissato un intorno C^1, per ϵ abbastanza piccolo u_ϵ appartiene a tale intorno. Ne segue che u_0 non è WLM.
Riassumendo: u_0 è WLM se e solo se $l < \pi$.
Soluzione di b:
Fisso l>0. Consideriamo le funzioni $u_\epsilon(x)$ costruite in questo modo:

- in $[0, \epsilon]$ il segmento congiungente i punti $(0, 0)$ e $(\epsilon, \sqrt[3]{\epsilon})$;
- in $[\epsilon, l - \epsilon]$ il segmento congiungente i punti $(\epsilon, \sqrt[3]{\epsilon})$ e $(l - \epsilon, \sqrt[3]{\epsilon})$;
- in $[l - \epsilon, \epsilon]$ il segmento congiungente i punti $(l - \epsilon, \sqrt[3]{\epsilon})$ e $(l, 0)$.

Si ha: $F(u_\epsilon) \leq 2\epsilon l + (l - 2\epsilon)(\epsilon - \epsilon^{\frac{2}{3}} + o(\epsilon^{\frac{4}{3}})) = -\epsilon^{\frac{2}{3}} l + o(\epsilon^{\frac{2}{3}})$. Dunque per ϵ abbastanza piccolo si ha che u_ϵ appartiene ad un intorno C^0 di u_0 (ma non nell'intorno C^1) e $F(u_\epsilon) < 0$. Dunque u_0 non è mai SLM.
Soluzione di c:
Si ha: $F(u) > -\frac{\pi}{2}l$. Consideriamo le funzioni $u_n(x)$ costruite in questo modo:

- in $[0, \frac{1}{n}]$ il segmento congiungente i punti $(0, 0)$ e $(\frac{1}{n}, -n)$;

- in $[\frac{1}{n}, l - \frac{1}{n}]$ il segmento congiungente i punti $(\frac{1}{n}, -n)$ e $(l - \frac{1}{n}, -n)$;
- in $[l - \frac{1}{n}, l]$ il segmento congiungente i punti $(l - \frac{1}{n}, -n)$ e $(l, 0)$.

Si vede facilmente che $F(u_n)$ tende a $-\frac{\pi}{2}l$. Dunque l'inf è $-\frac{\pi}{2}l$.

4 Esercizio4

4. For every real number $l > 0$, let us set:

$I(l) = inf\{\int_0^l (u'^6 - u'^2 + u^2 - u^4)dx : u \in C^1(0,l)$, u(0)=0, u(l)=0 $\}$

- (a) Determine for which positive values of l it turns out that $I(l)$ is negative.
- (b) Determine for which positive values of l it turns out that $I(l)$ is finite.
- (c) Compute the leading term of $I(l)$ as $l \to +\infty$.

Soluzione:
Sia F il funzionale.
Soluzione di a:
Fisso $l > 0$. Si ha che $u_0(x) \equiv 0$ soddisfa le d.b.c. ed è tale che $F(u_0) = 0$.
Si ha che u_0 non è global minimum, infatti non soddisfa (L) in quanto $L_{pp}(x, u_0(x), u_0'(x)) \equiv -2$.
Dunque esistono funzioni competitrici la cui immagine attraverso F è negativa. Dunque l'inf è negativo per ogni $l > 0$.
Soluzione di b:
Si ha che per ogni u che soddisfa le d.b.c. che $F(u) \geq \int_0^l \frac{u'^6}{2} - 1000 - u^4 dx = \int_0^l \frac{u'^6}{2} - u^4 dx - 1000l$. Dunque ci basta mostrare che il minimo di G(u):=$\int_0^l \frac{u'^6}{2} - u^4 dx$ con le d.b.c. esiste. Procediamo con il metodo diretto.
1)ambientazione: ok;
2)compattezza: Si ha :

$$M \geq \int_0^l \frac{u_n'^6}{2} - u_n^4 dx = \frac{1}{2}||u_n'||_{L^6}^6 - \int_0^l u_n^4 dx$$

Inoltre:

$$|u_n(x)| \leq |u_n(x) - u_n(0)| \leq ||u_n'||_{L^6}|x|^{\frac{5}{6}} \leq ||u_n'||_{L^6} l^{\frac{5}{6}}$$

Da cui mettendo insieme i due risultati si ottiene:

$$M \geq \frac{1}{2}||u_n'||_{L^6}^6 - ||u_n'||_{L^6}^4 l^{1+4\frac{5}{6}}$$

Da cui esiste M_1 tale che $||u_n'||_{L^6} \leq M_1$. Inoltre, si ha :

$$||u_n'||_{L^2}^2 = \int_0^l u_n'^2 \leq \int_0^l u_n'^6 + 100dx = ||u_n'||_{L^6}^6 + 100l \leq M_1^6 + 100l.$$

E da qui si procede in maniera standard.
3)semicontinuità: ok.
4)regolarità: ok.
Soluzione di c: