Alla lezione 052 abbiamo introdotto il concetto di integrale curvilineo, dando una definizione alla Riemann in questo modo: sia $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e consideriamo una partizione dell'intervallo data da $a = t_0, \dots, t_n = b$; a questo punto "unisco i puntini" e ottengo una spezzata, sulla quale considero $s_1, \dots, s_n$. L'integrale curvilineo è dato dalla somma di Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \cdot f(s_k)$$

con i dovuti "per ogni ε esiste $\delta \dots$". La mia domanda sorge qui: davvero è possibile, ripercorrendo la dimostrazione della lunghezza di una curva, concludere che sotto ipotesi di regolarità vale

$$I = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t \quad ?$$

Nel mio tentativo non sono riuscito a ricondurmi a una somma di Riemann su $\mathbb{R}$. Ci sarei riuscito se avessi però definito così l'integrale: data la partizione dell'intervallo, scelgo gli s_k sull'intervallo e considero

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \cdot f(\gamma(s_k))$$

oppure ancor meglio, dal momento che abbiamo già definito la lunghezza di una curva,

$$\sum_{k=1}^{n} (\text{lunghezza tratto di curva tra } \gamma(t_{k-1}) \text{ e } \gamma(t_k)) \cdot f(s_k)$$

Sono equivalenti tutte queste formulazioni? E qual è il passaggio da fare per trasformare la definizione originaria in somma di Riemann (sempre che sia necessario farlo) e concludere? Grazie e buona serata a tutti :)