

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 2

Pisa, 24 Maggio 2018

(Problemi da 3 punti)

1. Calcolare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2^n(n+4)}.$$

2. Determinare per quali valori del parametro reale α la soluzione del problema di Cauchy

$$u' = \frac{(u+2)2^u}{u+4}, \quad u(0) = \alpha$$

ha esistenza globale sia nel passato, sia nel futuro.

3. Per ogni intero positivo n , sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua ed iniettiva. Supponiamo che la successione f_n converga uniformemente su tutto \mathbb{R} ad una funzione $f_\infty : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Possiamo concludere che f_∞ è iniettiva?

4. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali $u' = u^2 - 3uv + 5$, $v' = v^3 + u - 9$.

- (a) Determinare se esistono dati iniziali per cui la soluzione è definita globalmente nel futuro, non è costante, e tende a $(1, 2)$ per $t \rightarrow +\infty$.
- (b) Determinare se esistono dati iniziali per cui la soluzione è definita globalmente nel passato, non è costante, e tende a $(1, 2)$ per $t \rightarrow -\infty$.

(Problemi da 8 punti)

5. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x^2}.$$

- (a) Dimostrare che è ben definita e di classe C^1 in $(0, +\infty)$.
- (b) Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

- (c) (Bonus question) Calcolare, al variare dei parametri reali α e β , il

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot |\log x|^\beta \cdot f(x).$$

6. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{\arctan(tu - 1)}{u}, \quad u(0) = \alpha.$$

- (a) Studiare esistenza globale, nel passato e nel futuro, nel caso speciale $\alpha = -2018$.
- (b) Nel caso speciale $\alpha = 2018$, dimostrare che la soluzione è globale nel futuro, e calcolarne la parte principale per $t \rightarrow +\infty$.
- (c) Stabilire se esistono valori $\alpha \neq 0$ per cui la soluzione è globale, sia nel passato sia nel futuro, e monotona.

7. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'' = -\frac{1}{u^3}, \quad u(0) = 2018, \quad u'(0) = \alpha.$$

- (a) Nel caso speciale $\alpha = 2018$, dimostrare che la soluzione è globale nel futuro e calcolarne la parte principale per $t \rightarrow +\infty$.
- (b) Stabilire per quali valori reali di α la soluzione è globale nel futuro.
- (c) Stabilire per quali valori reali di α la soluzione ha un massimo globale nel suo intervallo massimale di esistenza.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.