Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 09 Novembre 2013

1. Consideriamo i seguenti punti nello spazio

$$A = (0, 0, 1) \qquad B = (0, 2, 0) \qquad C = (-1, 2, 3) \qquad D = (0, 1, 1).$$

   (a) Determinare il volume del tetraedro $ABCD$.

   (b) Determinare l'angolo che la faccia ABC forma con la faccia ABD.

2. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v_1 = (0, 2, 3) \qquad v_2 = (-1, 0, 1) \qquad v_3 = (1, 1, 1).$$

   (a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(v_1) = v_1 - v_2, \qquad f(v_2) = v_2 - v_3, \qquad f(v_3) = v_3 - v_1.$$

   (b) Scrivere la matrice associata ad f nella base canonica.

   (c) Trovare la dimensione ed una base per il ker e l'immagine di f.

3. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore od uguale a 3. Consideriamo i sottospazi

$$V = \left\{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : p(0) = p(2) \text{ e } p(1) = 0\right\}, \qquad W = \operatorname{Span}\left\{x^2 + 1, x\right\}.$$

   Determinare la dimensione ed una base di V, W, $V + W$, $V \cap W$.

4. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{aligned} y + z &= -1 \\ 3x + 4y + 5z &= 2 \\ 6x + 7y + \lambda z &= 5 \end{aligned}$$

   dove λ è un parametro reale.

   (a) Risolvere il sistema nel caso particolare $\lambda = 0$.

   (b) Determinare per quali valori di λ il sistema ammette un'unica soluzione.

   (c) Determinare cosa accade per i restanti valori di λ.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

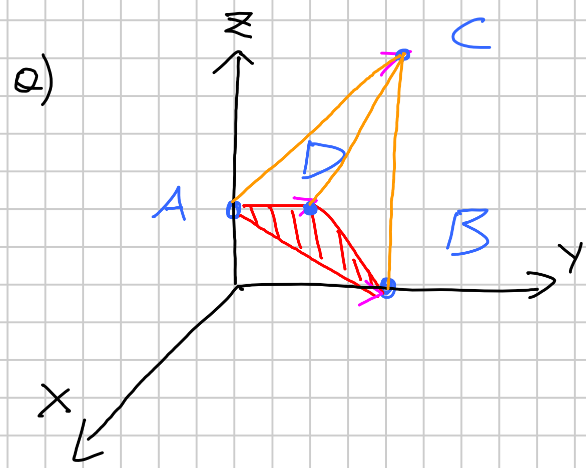
1. Consideriamo i seguenti punti nello spazio

$$A = (0, 0, 1) \qquad B = (0, 2, 0) \qquad C = (-1, 2, 3) \qquad D = (0, 1, 1).$$

(a) Determinare il volume del tetraedro $ABCD$.

(b) Determinare l'angolo che la faccia ABC forma con la faccia ABD.

a)



$$\text{AREA } \overset{\triangle}{ABD} = \frac{1}{2}(1 \cdot 1) = \frac{1}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot 1\right) = \frac{1}{6}$$

b) $ax + by + cz = d$

$$\begin{cases} A: & c = d \\ B: & 2b = d \\ C: & -a + 2b + 3c = d \end{cases} \qquad \begin{cases} c = d \\ b = d/2 \\ a = \cancel{d} + 3d - \cancel{d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6x + y + 2z = 2 \qquad n = (6, 1, 2)$$

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{51}}$$

2. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v_1 = (0,2,3) \qquad v_2 = (-1,0,1) \qquad v_3 = (1,1,1).$$

(a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(v_1) = v_1 - v_2, \qquad f(v_2) = v_2 - v_3, \qquad f(v_3) = v_3 - v_1.$$

(b) Scrivere la matrice associata ad f nella base canonica.

(c) Trovare la dimensione ed una base per il ker e l'immagine di f.

a) SI DEVE MOSTRARE CHE V_1, V_2, V_3 SONO L. IND.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OSS $\det = 2 - 3 + 2 = 1$

b) NELLA BASE V_1, V_2, V_3 $\qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\hat{A} V_\varepsilon = f_e(V_\varepsilon)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{CAMBIO DI BASE } \varepsilon \to e \qquad M V_\varepsilon = V_e$$

CALCOLO M^{-1} $\qquad$ MINORI + SEGNO $\begin{pmatrix} -1 & +1 & 2 \\ +2 & -3 & -3 \\ -1 & +2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{TRASP}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{CAMBIO BASE } e \to \varepsilon$$

$$\hat{A} V_\varepsilon = \hat{A} M^{-1} V_e$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -5 & 10 & -6 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} = A$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad MA^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \hat{A} \right] \qquad A^* V_\varepsilon = f_\varepsilon(\varepsilon)$$

c)

$$\hat{A}x = \begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-1&-1\\2&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{A} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&-2&1\\0&3&-3\\0&4&-4\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&-2&1\\0&3&-3\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=a\\ y=z=a\end{cases}$$

$$\dim KER + \dim Im = 3 \Rightarrow \dim KER = 1$$

BASE $a \cdot v_1 + a v_2 + a v_3 = a\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}$ oss $A\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$A^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c}A\\ \begin{pmatrix}-1&5&-3\\-5&10&-6\\-6&10&-6\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}-1&5&-3\\0&-15&9\\0&-20&12\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-1&5&-3\\0&-15&9\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=\frac{3}{5}z\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$IM f = a\begin{pmatrix}-1\\-5\\-6\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}5\\10\\10\end{pmatrix}$$

$$IM f = a(v_1 - v_2) + b(v_2 - v_3) = a\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&5\\-5&10\\-6&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c}-1&5&-2\\-5&10&-1\\-6&10&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}-1&5&-2\\0&-15&9\\0&-20&12\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}-1&5&-2\\0&-15&9\\0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases}-a+5b=-2\\ -15b=9\end{cases} \quad \begin{cases}a=-1\\ b=-3/5\end{cases}$$

$$-1\begin{pmatrix}-1\\-5\\-6\end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix}5\\10\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-3\\5&-6\\6&-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

3. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore od uguale a 3. Consideriamo i sottospazi

$$V = \left\{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : p(0) = p(2) \text{ e } p(1) = 0\right\}, \qquad W = \operatorname{Span}\left\{x^2 + 1, x\right\}.$$

Determinare la dimensione ed una base di V, W, $V + W$, $V \cap W$.

V: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\qquad \begin{cases} p(0) = \cancel{d} = 8a + 4b + 2c + \cancel{d} = p(2) \\ p(1) = a + b + c + d = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2}c + 2d - d - c = \frac{c}{2} + d \\ b = -\frac{3}{2}c - 2d \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \quad d = 0 \Rightarrow (1, -3, 2, 0) \\ c = 0 \quad d = 1 \Rightarrow (1, -2, 0, 1) \end{cases}$$

BASE: $p_{V,1}(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \qquad p_{V,2}(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \Rightarrow \text{DIM}(V) = 2$

W: BASE: $p_{W,1}(x) = x^2 + 1 \qquad p_{W,2}(x) = x \Rightarrow \text{DIM}(W) = 2$

$V + W$: $\equiv \text{SPAN}\{p_{V,1}(x), p_{V,2}(x), p_{W,1}(x), p_{W,2}(x)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RANGO $= 3 \Rightarrow \text{DIM}(V + W) = 3$ BASE: $p_{V,1}(x), p_{V,2}(x), p_{W,1}(x)$

$V \cap W$: $a\, p_{V,1}(x) + b\, p_{V,2}(x) = c\, p_{W,1}(x) + d\, p_{W,2}(x) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = c \\ c = -\frac{d}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \dim \text{KER} = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \text{DIM}(V \cap W) = 1$ BASE: $p_{V \cap W}(x) = x^2 - 2x + 1$

4. Consideriamo il sistema lineare

$$
\begin{aligned}
y + z &= -1 \\
3x + 4y + 5z &= 2 \\
6x + 7y + \lambda z &= 5
\end{aligned}
$$

dove λ è un parametro reale.

(a) Risolvere il sistema nel caso particolare $\lambda = 0$.

(b) Determinare per quali valori di λ il sistema ammette un'unica soluzione.

(c) Determinare cosa accade per i restanti valori di λ.

(a) $\begin{cases} y + z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 2 \\ 6x + 7y = 5 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 2 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} 6x = 5 - 77/9 = -32/9 \\ y = -1 + 20/9 = 11/9 \\ z = -2/9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -16/27 \\ y = 11/9 \\ z = -2/9 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y + z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 2 \\ 6x + 7y + \lambda z = 5 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & \lambda & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 6 & 7 & \lambda & 5 \\ 0 & 1 & 10-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-9 & 2 \end{array}\right)$

$\begin{cases} \text{UNICA SOLUZIONE } \lambda \neq 9 \\ \text{OSS } \det(A) = 24 + 3\lambda - 30 - 21 = 3\lambda - 27 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 9 \end{cases}$

(c) $\lambda = 9 \Rightarrow$ NESSUNA SOLUZIONE (3° EQ. $0 \cdot z = 2$!!! $\Rightarrow$ IMPOSSIBILE)