Studio di funzioni n

Argomenti: inf/sup/max/min in più variabili **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutte le tecniche per lo studio globale di funzioni di più variabili

1. Determinare massimo e minimo della funzione
$$f(x,y) = |x| - x|y|$$
sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. Determinare estremo inferiore e superiore della funzione
$$f(x,y,z) = \frac{x^2 + xy}{1 + z^2}$$
sull'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y = 1\}$.

3. Determinare estremo inferiore e superiore della funzione
$$f(x,y) = \frac{x + y^2}{x^2 + y}$$
sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 1/x \leq y \leq 1\}$.

4. Determinare estremo inferiore e superiore della funzione
$$f(x,y) = \frac{1 - e^{-xy}}{x^2 + y^2}$$
nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

5. Dimostrare che esiste una costante M tale che
$$|3a^2b^2 + a^3b| \leq M\left(\frac{3}{2}a^2b^2 + ab^3 + \frac{1}{4}b^4\right) \qquad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

6. (a) Determinare la migliore costante M tale che
$$x^2 + y^2 \leq M(x^4 + y^2)$$
per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x^4 + y^2 \geq 1$.

   (b) Determinare se esiste una costante M per cui vale la disuguaglianza precedente per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

7. Determinare ordine di infinitesimo/infinito e parte principale delle successioni
$$m_n = \min\left\{\frac{x^2 + |y|^3}{x^4 + y^2} : x^2 + y^2 = n\right\}, \qquad M_n = \max\left\{\frac{x^2 + |y|^3}{x^4 + y^2} : x^2 + y^2 = n\right\}.$$