Integrali impropri 1

Argomenti: integrali multipli impropri **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: tutto sugli integrali multipli, propri e impropri

Consideriamo i seguenti sottoinsiemi del piano (con un leggero abuso di notazione ci limitiamo in molti casi a riportare solo le relazioni che definiscono il sottoinsieme):

$$A = \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1\}, \qquad B = \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$C = \mathbb{R}^2, \qquad D = [1, +\infty) \times [1, +\infty), \qquad E = \{0 \leq y \leq x\},$$

$$F = [1, +\infty) \times [0, 1], \qquad G = \{0 \leq y \leq 1/x \leq 1\}, \qquad H = \{0 \leq y \leq x^2\}.$$

Stabilire se le funzioni assegnate in ogni riga della tabella sono integrabili in senso improprio sui sottoinsiemi indicati nelle colonne (segnalare quando l'integrale non è improprio).

Funzione	A	B	C	D	E	F	G	H
$\dfrac{1}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{x}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{y}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{x}{x^4+y^4}$								
$\dfrac{1}{x+y}$								
e^{-x}								
ye^{-x}								
$e^{-x^2-y^3}$								
$\dfrac{xy^2}{x^6+y^6}$								
$\dfrac{x}{y^3+1}$								
$\dfrac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{\sqrt{\lvert xy\rvert}}{\lvert x\rvert^5+\lvert y\rvert^5}$								

Integrali impropri 2

Argomenti: integrali multipli impropri **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: tutto sugli integrali multipli, propri e impropri

---

Sia A, B, $\ldots$, H gli stessi sottoinsiemi del piano della scheda precedente. Stabilire se le funzioni assegnate in ogni riga della tabella sono integrabili in senso improprio sui sottoinsiemi indicati nelle colonne (segnalare quando l'integrale non è improprio).

Funzione	A	B	C	D	E	F	G	H
$\dfrac{1}{x^2+y^2+x^2y^2}$								
$\dfrac{1}{x^2+y^4}$								
$\dfrac{y}{x^4+y^2}$								
$\dfrac{xy^2}{x^6+y^2}$								
$\dfrac{1}{x^2y^2+1}$								
$\dfrac{\log(1+xy)}{x^2+y^2}$								
xye^{-x^2y}								
$xye^{-x^2-y^2}$								
$\dfrac{e^{xy}-1}{x^4+y^4}$								
$\dfrac{e^{-xy}}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{1}{xy^2+x^2y}$								
$\dfrac{\lvert\sin(xy)\rvert}{x^2+y^2}$								

[Ce ne sta ancora uno]

Integrali impropri 3

Argomenti: integrali multipli impropri parametrici **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sugli integrali multipli, propri e impropri

---

Sia A, B, ..., H gli stessi sottoinsiemi del piano della scheda precedente. Stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ i seguenti integrali risultano convergenti.

Funzione	A	B	C	D	E	F	G	H
$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^a}$								
$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^a}$								
$\dfrac{y^a}{x^4+y^4}$								
$\dfrac{x^a}{x^4+y^4}$								
$\dfrac{y^a}{x^6+y^4}$								
$\dfrac{x^a}{x^6+y^4}$								
$\dfrac{x}{x^2+y^a}$								
$\dfrac{x}{x^a+y^2}$								
$\dfrac{\|x+y\|^a}{x^6+y^6}$								
$\dfrac{\arctan(x^2y)}{(x^2+y^2)^a}$								
$\dfrac{\arctan(x^ay)}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{x^3y}{1+x^2+y^a}$								
$\dfrac{\|\sin x\|^a}{\|x\|^3+\|y\|^3}$								

Integrali impropri 4

Argomenti: integrali multipli impropri parametrici **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: tutto sugli integrali multipli, propri e impropri

---

Consideriamo i seguenti sottoinsiemi del piano dipendenti da un parametro $b > 0$ (per semplicità riportiamo solo le relazioni):

$$A_b = \{x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^b\}, \qquad B_b = \{x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1/x^b\},$$
$$C_b = \{x \geq 1,\ 1 \leq y \leq x^b\}, \qquad D_b = \{x \geq 1,\ 0 \leq y \leq x^b\},$$
$$E_b = \{x \in [0,1],\ x \leq y \leq x + x^b\}, \qquad F_b = \{x \geq 1,\ x^{-b} \leq y \leq 2x^{-b}\},$$

Stabilire per quali valori del parametro b i seguenti integrali risultano convergenti.

Funzione	A_b	B_b	C_b	D_b	E_b	F_b
$\dfrac{1}{x^2+y^2}$						
$\dfrac{x}{x^2+y^2}$						
$\dfrac{y}{x^4+y^4}$						
$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$						
$\dfrac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}$						
$\dfrac{x}{x^6+y^4}$						
$\dfrac{1}{xy}$						
$\dfrac{1}{y}$						
$\dfrac{\arctan y}{\sqrt{x}}$						
$\dfrac{\arctan y}{x}$						
$\dfrac{\log(1+xy)}{x^2+y^2}$						
$\dfrac{e^{xy}}{x^2+y^2}$						

© 2016 Massimo Gobbino

Uso educational personale

Integrali impropri 5

Argomenti: integrali tripli impropri **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sugli integrali tripli, propri e impropri

Consideriamo i seguenti sottoinsiemi dello spazio:

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}, \\ B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \geq 1\}, \\ C &= \mathbb{R}^3, \\ D &= [1,+\infty) \times [1,+\infty) \times [1,+\infty). \end{aligned}$$

Stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ i seguenti integrali risultano convergenti.

Funzione	A	B	C	D
$\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^a}$				
$\dfrac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^a}$				
$\dfrac{y\|z\|^a}{x^6+y^6+z^6}$				
$\dfrac{x}{x^a+y^2+z^2}$				
$\dfrac{x}{x^2+\|y\|^a+z^2}$				
$\dfrac{\|x\|^a}{x^2+y^4+z^6}$				
$\dfrac{\|z\|^a}{x^2+y^4+z^6}$				
$\dfrac{x}{(x^2+y^2)^a+z^2}$				
$\dfrac{\arctan(xy)}{(x^4+y^4+z^4)^a}$				
$\dfrac{\|x\|^a}{\log(1+x^2+y^2+z^2)}$				
$\dfrac{\|\arctan(x-y)\|^a}{x^4+y^4+z^4}$				

© 2016 Massimo Gobbino

Uso educational personale

Integrali impropri 6

Argomenti: integrali multipli impropri parametrici **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sugli integrali multipli, propri e impropri

---

Consideriamo le seguenti successioni di sottoinsiemi del piano:

$$\begin{aligned}
A_n &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \geq n\},\\
B_n &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1/n\},\\
C_n &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq ny \leq x\},\\
D_n &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1/n,\ 0 \leq n^2 y \leq x^2\},\\
E_n &= [n,+\infty) \times [n,+\infty),\\
F_n &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ nxy \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Consideriamo ora le successioni di numeri ottenute integrando le funzioni indicate in ogni riga sulle varie successioni di insiemi. Si chiede di stabilire quali successioni sono ben definite, quali tendono a zero e quali tendono all'infinito (determinando anche, quando hanno senso, l'ordine di infinitesimo/infinito e la parte principale).

Funzione	A_n	B_n	C_n	D_n	E_n	F_n
$x^2 y$						
$(x+\sin y)^2$						
$xy(e^{xy}-1)$						
xe^{-y}						
$\arctan(x+\sin y)$						
$\dfrac{1}{x^2+y^2}$						
$\dfrac{\arctan x}{x^2+y^2}$						
$\dfrac{\arctan y}{x^2+y^2}$						
$\dfrac{1}{x^4+y^4}$						
$\dfrac{x}{x^4+y^4}$						
$\dfrac{1}{x^4+y^2}$						