Esercizio 7.

Data la funzione così definita, $f(x,y) = \begin{cases} 0 \ se \ (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^3 + x \cdot y^2 + y^4}{x^2 + y^2} \ se \ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

determinare :

$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $f_{\boldsymbol{v}}(0,0)$, differenziabilità , appartenenza alle classi $C^0(\mathbb{R}^2)$ e $C^1(\mathbb{R}^2)$, eventuale esistenza ed uguaglianza tra $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$.

Svolgimento :

Passando a coordinate polari, $f(x,y)$ diventa $g(\rho,\theta) = \rho \cdot [\cos(\theta) + \rho \cdot \sin^4(\theta)]$ ed essendo

$0 \leqslant |g(\rho,\theta)| \leqslant \rho \cdot |\cos(\theta)| + \rho^2 \cdot \sin^4(\theta) \leqslant \rho \cdot (1+\rho)$ segue che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} g(\rho,\theta) = 0$

Dunque, $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$ ed è $C^0(\mathbb{R}^2)$.

Calcoliamo adesso $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^2 \cdot h} = 1 \qquad f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \frac{k^4}{k^2 \cdot k} = 0$$

Calcoliamo le derivate direzionali in $(0,0)$:

posto $\boldsymbol{v} = (\alpha,\beta) \neq \boldsymbol{0}$, abbiamo che

$$f_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha \cdot h, \beta \cdot h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha^3 \cdot h^3 + \alpha \cdot \beta^2 \cdot h^3 + \beta^4 \cdot h^4}{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot h^3} = \lim_{h\to 0} \alpha + \frac{\beta^4}{(\alpha^2+\beta^2)} \cdot h = \alpha$$

Dunque, le derivate direzionali in $(0,0)$ esistono ed è $f_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \alpha$

Calcoliamo adesso $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ e verifichiamone la continuità in $(0,0)$:

$$f_x(x,y) = \frac{[(3 \cdot x^2 + y^2) \cdot (x^2 + y^2) - 2 \cdot x \cdot (x^3 + x \cdot y^2 + y^4)]}{(x^2+y^2)^2} = 1 - \frac{2 \cdot x \cdot y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Posto ora $g(x,y) = \dfrac{2 \cdot x \cdot y^4}{(x^2+y^2)^2}$ e passando a coordinate polari, si osserva che

$g(x,y) = h_1(\rho,\theta) = 2 \cdot \rho \cdot \cos(\theta) \cdot \sin^4(\theta)$ ed essendo $0 \leqslant |h_1(\rho,\theta)| = 2 \cdot \rho \cdot \sin^4(\theta) \cdot |\cos(\theta)| \leqslant 2 \cdot \rho$ otteniamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} h_1(\rho,\theta) = 0$$

In conclusione, quindi, è $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 1$ e $f_x(x,y)$ è continua in $(0,0)$.

$$f_y(x,y) = \frac{[(2 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^3) \cdot (x^2 + y^2) - 2 \cdot y \cdot (x^3 + x \cdot y^2 + y^4)]}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4 \cdot x^2 \cdot y^3 + 2 \cdot y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

Passando a coordinate polari, $f_y(x,y)$ diventa $h_2(\rho,\theta) = 2 \cdot \rho \cdot \sin^3(\theta) \cdot (1 + \cos^2(\theta))$ ed essendo

$0 \leqslant |h_2(\rho, \theta)| \leqslant 4 \cdot \rho$ segue che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x, y) = \lim\limits_{\rho\to 0^+} h_2(\rho, \theta) = 0$

Dunque, anche $f_y(x, y)$ è continua in $(0,0)$, la funzione data è $C^1(\mathbb{R}^2)$ ed è, per il teorema del differenziale totale, differenziabile in $(0,0)$.

Calcoliamo infine le derivate parziali seconde miste e verifichiamone la continuità in $(0,0)$:

$$f_{yx}(x, y) = \frac{-2\cdot x}{(x^2+y^2)^4} \cdot [4\cdot y^3 \cdot (x^2+y^2)^2 - 4\cdot y^5 \cdot (x^2+y^2)] = \frac{-8\cdot x^3 \cdot y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

Poiché $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_{yx}(x, y)$ non esiste, come si può vedere ad esempio calcolandolo lungo le direzioni di uno degli assi e lungo la bisettrice del 1° e 3° quadrante, $f_{yx}(x, y)$ non è continua in $(0,0)$ e, quindi, non sono verificate le condizioni del teorema di Schwarz sullo scambio dell'ordine di derivazione.
Tuttavia, per calcolo diretto, otteniamo che

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1-1}{k} = 0 \qquad f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Quindi, è $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$