

In relazione al mio svolgimento dell'esercizio 3, il metodo degli omini non viene impiegato per dimostrare l'esistenza del limite, per la qual cosa non sarebbe sufficiente, bensì per determinare i valori di liminf e limsup, che sono poi confermati essere tali per mezzo delle disequazioni.

Mentre nel suo svolgimento Gimusi afferma che l'espressione

$\frac{\max\{x, y\}}{x+y}$ tende complessivamente a 0, in quanto il denominatore è > 0 ed il numeratore, essendo uguale ad x oppure y , tende a 0.

Ora, se è vero che sul dominio in esame è $x > 0$ e $y > 0$, è anche vero che $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ e, quindi, anche il denominatore tende a 0 (per valori positivi, ma sempre a 0 tende).

Al più possiamo dire che

$$\frac{\max\{x, y\}}{x+y} = \begin{cases} \frac{x}{x+y} & \text{se } x > y \\ \frac{y}{x+y} & \text{se } x < y \end{cases} \quad \text{da cui segue che} \quad 0 \leq \frac{x}{x+y} \leq \frac{x}{x} = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \frac{y}{x+y} \leq \frac{y}{y} = 1$$

Per quanto riguarda l'esercizio 4, credo che la mia dimostrazione possa essere mantenuta nei casi 4b e 4c, dove i domini non intersecano la regione di indeterminatezza della funzione data, costituita dalla parabola $y = -x^2$. Nel caso 4a, invece, il limite non esiste ed è

$$\liminf = -\infty$$

$$\limsup = +\infty$$

come dimostra Gimusi, calcolando il limite lungo la curva $y = x^4 - x^2$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^4 - t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot (t^2 - 1) \cdot \sin(t)}{t^2 + t^4 - t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^3}{t^4} = \begin{cases} +\infty & \text{se } t \rightarrow 0^- \\ -\infty & \text{se } t \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

Analogamente, nel caso 4d il limite non esiste ed è

$$\liminf = -\infty$$

$$\limsup = +\infty$$

dove liminf è individuato da $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, t^4 - t^2) = -\infty$

mentre limsup è individuato da $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, -t^4 - t^2) = +\infty$

Nell'esercizio 6 Gimusi scinde il limite in differenza di due espressioni entrambe tendenti a 0.

Ora, se è vero che i due fattori costituiti dai limiti notevoli tendono ad 1, non sono invece convinto che, posto ad esempio

$$g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + x^2 \cdot y^2}$$

$$\text{sia} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) = 0$$

Basta considerare $\lim_{t \rightarrow 0} g(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t^2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } t \rightarrow 0^+ \\ -\infty & \text{se } t \rightarrow 0^- \end{cases}$

In merito all'esercizio 10d, è sufficiente osservare che il limite lungo l'asse x positivo, che appartiene al dominio in esame, è $+\infty$.