Esercizio 8.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ della funzione $f(x,y)=\dfrac{y^4}{|x|^3+|y|^3}$

8a : per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 8a :</u>

In coordinate polari la funzione data diventa

$$f(\rho,\theta)=\rho\cdot\frac{\cos^4(\theta)}{|\cos(\theta)|^3+|\sin(\theta)|^3} \quad , \quad \rho>0 \quad \text{e} \quad \theta\in[0,2\pi]$$

Il denominatore $d(\theta)=|\cos(\theta)|^3+|\sin(\theta)|^3$ è una funzione continua di θ sempre > 0, in quanto somma di due quantità positive che non si annullano mai contemporaneamente. Quindi, per Weierstrass, $d(\theta)$ presenterà un minimo $m>0$, da cui segue che

$$0\leqslant|f(\rho,\theta)|=\rho\cdot\frac{\cos^4(\theta)}{|\cos(\theta)|^3+|\sin(\theta)|^3}\leqslant\frac{\rho}{m}$$

Essendo ora $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{\rho\to0^+} f(\rho,\theta)$

dalla disuguaglianza precedente, per $\rho\to0^+$, segue che

$$0=\lim_{\rho\to0^+}|f(\rho,\theta)|=\lim_{\rho\to0^+} f(\rho,\theta)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Dunque, il limite esiste ed è 0

Poiché il limite esiste su tutto $\mathbb{R}^2$, esso esisterà anche su tutte le sue restrizioni. Quindi, avremo che anche su tutti gli altri domini, indicati con 8b, 8c e 8d, è

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$