

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

# Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 5 Giugno 2017

1. Consideriamo la successione

$$a_n = \left(\frac{n}{n+4}\right)^n - \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n}.$$

- (a) Dimostrare che  $a_n$  è infinitesima.
- (b) Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di  $a_n$ .

2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sin(x^4) + x^7.$$

- (a) Determinare se  $f(x)$  è convessa in  $(2017, +\infty)$ .
- (b) Determinare se esistono valori reali di  $\lambda$  per cui l'equazione  $f(x) = \lambda$  ammette esattamente una soluzione reale.
- (c) Determinare se esiste una costante reale  $c$  tale che

$$f(x) \leq c \sinh x \quad \forall x \geq 0.$$

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{|x_n^3 - x_n|}{n + x_n^2}, \quad x_0 = 2017.$$

- (a) Determinare il limite della successione.
- (b) Determinare il limite della successione  $2^n x_n$ .
- (c) (Bonus question) Determinare il limite della successione  $n! \cdot x_n$ .

4. Studiare, al variare del parametro reale  $\alpha > 0$ , la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^7 + 7} dt.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.  
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.