Buonasera, vorrei chiedere aiuto su un esercizio relativo all'hölderianità di una funzione integrale. La funzione in questione è

$$f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\arctan\sqrt{t}}$$

nell'intervallo $(0,1)$. Per semplificare, detta

$$g(x) = \int_0^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\arctan\sqrt{t}}$$

avremo che $f(x) = g(\sqrt{x})$. Intanto f è uniformemente continua (estendo a $[0,1]$, poiché l'integrale converge, e uso Heine-Cantor) ma non lipschitziana (la derivata è illimitata per $x \to 0^+$). Più difficile è stato per me stabilire se è α-hölderiana per qualche $\alpha \in (0,1)$. L'unica idea che ho avuto è la seguente: giustificando il fatto con uno studio di funzione suggerito da Taylor è possibile dimostrare che

$$\sqrt{t} - \frac{t\sqrt{t}}{3} < \arctan\sqrt{t} < \sqrt{t} \quad \forall t \in (0,1).$$

Passando agli integrali, si ha che

$$g(y) - g(x) = \int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{\arctan\sqrt{t}} \leq \int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t} - \frac{t\sqrt{t}}{3}}, \quad x < y$$

Il primo integrale è semplice. Il secondo – almeno se i conti son giusti – mi è venuto

$$= \sqrt{3}\log\left(1 + 2\sqrt{3}\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{(\sqrt{3}+\sqrt{x})(\sqrt{3}-\sqrt{y})}\right)$$

Il denominatore è sempre $\geq 3 - \sqrt{3}$, da cui

$$\sqrt{3}\log\left(1 + 2\sqrt{3}\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{(\sqrt{3}+\sqrt{x})(\sqrt{3}-\sqrt{y})}\right) \leq (3+\sqrt{3})(\sqrt{y}-\sqrt{x})$$

Adesso verifico l'hölderianità, tralasciando i valori assoluti in quanto tutto positivo per $y > x$:

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{y}-\sqrt{x}) \leq 2(y-x)^{1/2} \leq g(y) - g(x) = \\ = \int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{\arctan\sqrt{t}} \leq (3+\sqrt{3})(\sqrt{y}-\sqrt{x}) \leq (3+\sqrt{3})(y-x)^{1/2} \end{aligned} \tag{1}$$

Ricordando che siamo su un intervallo, per composizione di funzioni hölderiane posso concludere che la mia iniziale f è $\frac{1}{4}$-hölderiana (e di conseguenza α-hölderiana $\forall \alpha \in (0, \frac{1}{4}]$). Inoltre, se avessimo $g(y) - g(x) \leq H(y-x)^{1/2+\varepsilon}$, allora per la transitiva (detto $z = y - x$)

$$2\sqrt{z} \leq Hz^{\varepsilon}\sqrt{z} \Rightarrow \frac{2}{z^{\varepsilon}} \leq H$$

che è un comportamento decisamente insolito per una quantità che tende a più infinito (per $z \to 0^+$). Quindi i valori di hölderianità trovati sono effettivamente i soli possibili.