1. Determinare una primitiva della funzione $\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}$.

Svolgimento di 1. :

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}dx = \int \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}dx$$

posto $\tan(x) = y$, segue che $\dfrac{1}{\cos^2(x)}\cdot dx = dy$. Quindi, l'integrale dato si trasforma in

$\int y^2 dy = \dfrac{y^3}{3}$ da cui, tornando indietro alla variabile x, segue che una primitiva della funzione data è

$$\frac{\tan^3(x)}{3}$$

2. Calcolare $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}dx$.

Svolgimento di 2. :

Posto $x+1 = t^2$, segue che $dx = 2\cdot t\,dt$ con $1\leqslant t\leqslant 2$. Pertanto, l'integrale dato diventa

$$\int_1^2 \frac{2\cdot t}{t+2}dt = \int_1^2 2\,dt - \int_1^2 \frac{4}{t+2}dt = [2\cdot t - 4\cdot\log|t+2|]_1^2 = 4-4\cdot\log(4)-2+4\cdot\log(3) = 2+4\cdot\log(\frac{3}{4})$$

3. Determinare per quali valori del parametro reale positivo a si ha convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^a}dx$$

Svolgimento di 3. :

Integrale improprio con problema in $x=0$, dove la funzione integranda è eventualmente illimitata, e a $+\infty$ dove l'intervallo di integrazione è illimitato. Pertanto è :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^a}dx = \int_0^1 \frac{\arctan(x^2)}{x^a}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^a}dx$$

Consideriamo il primo integrale a destra :

essendo $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x^2)}{x^a} = \lim_{x\to 0^+} x^{2-a} = \left\{\begin{matrix} 0 & per & a<2 \\ 1 & per & a=2 \\ +\infty & per & a>2 \end{matrix}\right\}$,

la funzione integranda è limitata in $x=0$ e, quindi, l'integrale in esame converge per $0<a\leqslant 2$.

Per $a>2$ poniamo $g(x) = \dfrac{1}{x^{a-2}}$ ed abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x^2)}{x^a} \cdot x^{a-2} = 1$$

Dunque, l'integrale converge per confronto asintotico se $a-2<1$, cioè per $a<3$.

Complessivamente, quindi, il primo integrale a destra converge per $0<a<3$.

Esaminiamo adesso il secondo integrale a destra :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^a} dx$$

Sia ora $h(x) = \frac{1}{x^a}$ Allora è $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^a} \cdot x^a = \frac{\pi}{2}$ e l'integrale converge per confronto

asintotico se $a>1$.

Riassumendo, l'integrale dato converge per $1<a<3$.

4. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da $x_0=2016$, $x_1=2017$ e

   $x_{n+2}=3\cdot x_{n+1}+5\cdot x_n+7^n \quad \forall n\in N$.

   Calcolare il limite di $7^{-n}\cdot x_n$

<u>Svolgimento di 4. :</u>

Consideriamo la ricorrenza omogenea associata : $x_{n+2}=3\cdot x_{n+1}+5\cdot x_n$

ed il suo polinomio caratteristico : $x^2-3\cdot x-5=0$

Allora abbiamo che : $x = \frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$

e la soluzione della ricorrenza omogenea è data da : $x_n=c_1\cdot\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)^n+c_2\cdot\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)^n$

Cerchiamo adesso una soluzione della ricorrenza non omogenea del tipo $x_n=c_3\cdot 7^n$, da cui segue che :

$c_3\cdot 7^{n+2}=3\cdot c_3\cdot 7^{n+1}+5\cdot c_3\cdot 7^n+7^n$ quindi $49\cdot c_3=21\cdot c_3+5\cdot c_3+1$ da cui infine $c_3=1/23$

La soluzione generale della ricorrenza data è dunque :

$$x_n=c_1\cdot\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)^n+c_2\cdot\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)^n+\frac{7^n}{23}$$

Pertanto è

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{7^n}= \lim_{n\to+\infty} c_1\cdot(-1)^n\cdot\left(\frac{\sqrt{29}-3}{14}\right)^n+c_2\cdot\left(\frac{3+\sqrt{29}}{14}\right)^n+\frac{1}{23} = \frac{1}{23}$$

6. (a) Determinare la soluzione del problema di Cauchy (precisando l'intervallo massimale di esistenza)

$$\dot{u}+\frac{u}{1+t} = \arctan(t) \quad u(0) = 1$$

Svolgimento di 6. (a) :

Trattandosi di una equazione differenziale lineare del 1° ordine del tipo $\dot{u}+a(t)\cdot u = b(t)$, ricorriamo alla formula per la soluzione generale :

$u(t) = \mathrm{e}^{-A(t)}\cdot\left\{c+\int b(s)\cdot\mathrm{e}^{A(s)}ds\right\}$ dove $A(t)$ è una qualunque primitiva di $a(t)$

Pertanto è :

$A(t) = \int\frac{1}{1+t}dt = \log|1+t|$ con $t>-1$ dovendo l'intervallo di esistenza contenere il valore iniziale $t=0$

$\int b(s)\cdot\mathrm{e}^{A(s)}ds = \int(1+s)\cdot\arctan(s)ds$ da cui, integrando per parti, segue che

$\left(s+\frac{s^2}{2}\right)\cdot\arctan(s)-\int\left(s+\frac{s^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{1+s^2}ds$ da cui, effettuando la divisione polinomiale, otteniamo

$\left(s+\frac{s^2}{2}\right)\cdot\arctan(s)-\frac{1}{2}\cdot\left[\int 1\,ds+\int\frac{2\cdot s}{1+s^2}ds-\int\frac{1}{1+s^2}ds\right]$ da cui infine

$$\left(s+\frac{s^2}{2}\right)\cdot\arctan(s)-\frac{1}{2}\cdot\left[s-\arctan(s)+\log(1+s^2)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[(1+s)^2\cdot\arctan(s)-\log(1+s^2)-s\right]$$

Quindi, tornando alla variabile t e sostituendo nella formula risolutiva, otteniamo che :

$u(t) = \frac{2\cdot c+(1+t)^2\cdot\arctan(t)-t-\log(1+t^2)}{2\cdot(1+t)}$ cioè la soluzione generale del problema di Cauchy posto.

Imponendo la condizione iniziale, troviamo che : $u(0) = c = 1$

Dunque, la soluzione è : $u(t) = \frac{2+(1+t)^2\cdot\arctan(t)-t-\log(1+t^2)}{2\cdot(1+t)}$ per $t\in(-1,+\infty)$

6. (b) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\ddot{u}+\frac{\dot{u}}{1+t} = 0.$$

Svolgimento di 6. (b) :

Poniamo $\dot{u}(t) = y(t)$ da cui segue che $\ddot{u}(t) = \dot{y}(t)$ e l'equazione differenziale si trasforma in

$\dot{y}+\frac{y}{1+t} = 0$ a variabili separabili. Infatti è

$\frac{dy}{dt}=-\frac{y}{1+t}$ da cui $\frac{dy}{y}=-\frac{dt}{1+t}$ quindi $\log(y)=\log(\frac{1}{|1+t|})+c$ ed infine $y(t)=\frac{e^c}{|1+t|}=\frac{k_1}{|1+t|}$ $k_1>0$

Tornando alla funzione $u(t)$ e scegliendo, ad esempio, l'intervallo in cui è $1+t>0,$ abbiamo che :

$u(t)=k_1\cdot\log(1+t)+k_2$

7. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1}=\frac{5\cdot x_n}{4+x_n}+\frac{a}{n} \qquad x_1=\frac{1}{2017}$$ dove a è un parametro reale.

(a) Determinare, nel caso $a=0,$ il limite della successione.

<u>Svolgimento di 7. (a) :</u>

Piano di studio con monotonia :

i) $\frac{1}{2017}\leqslant x_n\leqslant 1 \qquad \forall n\in N$
ii) $x_{n+1}\geqslant x_n \qquad \forall n\in N$
iii) $x_n\to l\ \in R$
iv) $l=1$

Dim. i)

La funzione $f(x)=\frac{5\cdot x}{4+x}$ è monotona strettamente crescente sull'intervallo in esame, essendo

$f'(x)=\frac{20}{(4+x)^2}>0 \quad \forall x$ dell'insieme di definizione.

$x_n\geqslant\frac{1}{2017}$ Proviamo per induzione :

passo base : $n=1$ implica $x_1=\frac{1}{2017}\geqslant\frac{1}{2017}$

passo induttivo : se la relazione è vera per $n,$ allora è vera anche per $n+1$

ipotesi induttiva : $x_n\geqslant\frac{1}{2017}$ tesi : $x_{n+1}\geqslant\frac{1}{2017}$

Per la formula ricorsiva, l'ipotesi induttiva e la monotonia di $f(x)$ possiamo scrivere :

$$x_{n+1}=\frac{5\cdot x_n}{4+x_n}\geqslant\frac{5/2017}{4+1/2017}=\frac{5}{8069}\geqslant\frac{1}{2017}$$

$x_n\leqslant 1.$ Ancora per induzione :

Passo base : $n=1$ implica $x_1=\frac{1}{2017}\leqslant 1$

Passo induttivo: se la relazione è vera per $n,$ allora è vera anche per $n+1$

ipotesi induttiva : $x_n \leqslant 1$ tesi : $x_{n+1} \leqslant 1$

per le stesse considerazioni fatte sopra, segue che :

$$x_{n+1} = \frac{5 \cdot x_n}{4 + x_n} \leqslant \frac{5}{4+1} = 1$$

Dim. ii)

$x_{n+1} \geqslant x_n$ Sempre per induzione :

Passo base : $n=1$ implica $x_2 = \frac{5 \cdot x_1}{4 + x_1} = \frac{5}{8069} \geqslant \frac{1}{2017} = x_1$

Passo induttivo : se la relazione è vera per n, allora è vera anche per $n+1$

ipotesi induttiva : $x_{n+1} \geqslant x_n$ tesi : $x_{n+2} \geqslant x_{n+1}$

$$x_{n+2} = \frac{5 \cdot x_{n+1}}{4 + x_{n+1}} \geqslant \frac{5 \cdot x_n}{4 + x_n} = x_{n+1}$$

Dim iii)

Per il teorema delle successioni monotone, essendo per i punti i) e ii) x_n limitata e debolmente crescente, esiste $l \in R$ tale che $x_n \to l$.

Dim. iv)

Per il punto iii) passiamo al limite nella formula ricorsiva e otteniamo che :

$$x_{n+1} = \frac{5 \cdot x_n}{4 + x_n} \quad \text{implica} \quad l = \frac{5 \cdot l}{4 + l} \quad \text{da cui} \quad l^2 - l = 0 \quad \text{ed infine} \quad l = 0 \quad e \quad l = 1$$

La soluzione $l=0$ è tuttavia incompatibile con il punto i). Pertanto $x_n \to 1$.