Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

# Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 24 Febbraio 2017

1. Consideriamo la funzione $f(x,y) = \arctan(xy) - xy + y^2x^6$.
   (a) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario, specificando se si tratta di un punto di massimo/minimo locale.
   (b) Determinare estremo inferiore e superiore di $f(x,y)$ al variare di $(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$.

2. Consideriamo la superficie
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y + z = 1,\ y \geq 0,\ z \geq 0\},$$
   orientata prendendo in $(0,1/2,1/2)$ il vettore che punta verso le $z$ positive, ed il campo vettoriale $F = (x, x+y, 2x+z)$.
   Calcolare il flusso del rotore di $F$ attraverso $S$.

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2 + x^2}.$$
   (a) Dimostrare che $f(x)$ è ben definita e continua su tutto $\mathbb{R}$.
   (b) Dimostrare che $f(x)$ è di classe $C^1$ in $(0,+\infty)$.
   (c) Determinare se $f(x)$ è di classe $C^1$ su tutto $\mathbb{R}$.

4. Consideriamo l'equazione differenziale
$$u' = \frac{u^2 \arctan u}{u - t}.$$
   (a) Studiare l'esistenza globale (nel passato e nel futuro), e l'eventuale comportamento asintotico per $t \to \pm\infty$, della soluzione che verifica la condizione $u(2) = 1$.
   (b) Stessa domanda per la soluzione che verifica la condizione $u(0) = 1$.
   (c) (Bonus question) Stabilire se esistono soluzioni positive definite per ogni $t \leq 0$ e tali che si abbia convergenza dell'integrale improprio
$$\int_{-\infty}^{0} u(t)\, dt.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.