18 giugno 2010

3. Sia $F(x)$ definita per $x>0$ da $F(x) = \int_x^{2\cdot x} \frac{\arctan(t)}{t}\, dt$.

(a) Provare che F si estende con continuità in $x=0$.
(b) Provare che F è monotona.
(c) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

<u>Svolgimento di (a) :</u>

E' $F(0) = \lim_{x\to 0^+} \int_x^{2\cdot x} \frac{\arctan(t)}{t}\, dt$.

Adesso, essendo $x \leqslant t \leqslant 2\cdot x$, segue che per $x\to 0^+$ anche $t\to 0^+$. Pertanto abbiamo che, essendo

$\lim_{t\to 0^+} \frac{\arctan(t)}{t} = 1$, la funzione integranda è limitata e l'integrale esiste finito.

E' dunque $F(0) = \lim_{x\to 0^+} \int_x^{2\cdot x} \frac{\arctan(t)}{t}\, dt = \lim_{x\to 0^+} \int_x^{2\cdot x} 1\, dt = \lim_{x\to 0^+} [t]_x^{2\cdot x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$.

<u>Svolgimento di (b) :</u>

E' $F'(x) = \frac{2\cdot\arctan(2\cdot x)}{2\cdot x} - \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{1}{x}\cdot[\arctan(2\cdot x) - \arctan(x)]$, ed è sempre $F'(x)>0 \ \ \forall x>0$.

Infatti, essendo la funzione arcotangente monotona strettamente crescente su tutto R ed essendo $2\cdot x > x \ \ \forall x>0$, segue che

$$\frac{1}{x}\cdot[\arctan(2\cdot x) - \arctan(x)] > 0 \ \ \forall x>0.$$

Dunque, per monotonia 2, anche $F(x)$ è monotona strettamente crescente.

<u>Svolgimento di (c) :</u>

Per $x>0$ è $x \leqslant t \leqslant 2\cdot x$ ed è $\frac{\arctan(t)}{t} > 0$ perché quoziente di due quantità strettamente positive.
Dunque è $F(x)>0$.

E' poi $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot[\arctan(2\cdot x) - \arctan(x)] = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot\left[2\cdot x - x + o(x^2)\right] = 1$

e

$$\lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot[\arctan(2\cdot x) - \arctan(x)] = \frac{0}{\infty} = 0$$

Dunque, $F(x)$ parte da $x=0$ come la bisettrice del primo quadrante, è, per il punto (b), monotona strettamente crescente e, definitivamente, la tangente al suo grafico è parallela all'asse x. Cioè $F(x)$ presenta un asintoto orizzontale ed è, pertanto, superiormente limitata.

Inoltre, per $x \geqslant 2$ è $\frac{1}{t} < \frac{\arctan(t)}{t} < \frac{\pi/2}{t}$ da cui segue che

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2\cdot x}\frac{1}{t}\,dt \leqslant \lim_{x\to+\infty}\int_x^{2\cdot x}\frac{\arctan(t)}{t}\,dt \leqslant \lim_{x\to+\infty}\int_x^{2\cdot x}\frac{\pi/2}{t}\,dt \quad \text{da cui segue}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log(t)\right]_x^{2\cdot x} \leqslant \lim_{x\to+\infty}\int_x^{2\cdot x}\frac{\arctan(t)}{t}\,dt \leqslant \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\left[\log(t)\right]_x^{2\cdot x} \quad \text{da cui infine}$$

$$\log(2) \leqslant \lim_{x\to+\infty}\int_x^{2\cdot x}\frac{\arctan(t)}{t}\,dt \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\log(2)$$

Le considerazioni fatte fin qui, se corrette, sono sufficienti per affermare che $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}\cdot\log(2)$?
In caso contrario, come si sarebbe dovuto procedere per rispondere al quesito ?