Calcolare $\int_0^{\pi} \sin(x)\cdot\log(\sin(x))\,dx$

Svolgimento :

Essendo $\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\cdot\log(\sin(x)) = \lim_{x\to 0^+} x\cdot\log(x) = 0$

ed essendo $\lim_{x\to \pi^-} \sin(x)\cdot\log(\sin(x)) = \lim_{y\to 0^+} \sin(\pi-y)\cdot\log(\sin(\pi-y)) = \lim_{y\to 0^+} \sin(y)\cdot\log(\sin(y)) = 0$

(dopo aver posto $y = \pi - x$), la funzione integranda è limitata in entrambi i casi e l'integrale è proprio.

Calcoliamo adesso una primitiva della funzione integranda :

posto $\sin(x)=t$ segue che $\cos(x)\,dx=dt$ da cui segue $dx=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ e l'integrale dato diventa

$$\int \sin(x)\cdot\log(\sin(x))\,dx = \int \frac{t\cdot\log(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$ da cui, integrando per parti, si ottiene

$$-\sqrt{1-t^2}\cdot\log(t) + \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,dt$$

Pongo adesso nell'integrale rimasto $1-t^2 = y^2;$ segue che $-2\cdot t\;dt = 2\cdot y\;dy,$ da cui $dt = -\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$

Pertanto è $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,dt = -\int \frac{y^2}{\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2}\,dy = \int \frac{y^2}{y^2-1}\,dy$

Effettuando adesso la divisione polinomiale e integrando successivamente per fratti semplici, otteniamo

$$\int \frac{y^2}{y^2-1}\,dy = \int \left(1+\frac{1/2}{y-1}-\frac{1/2}{y+1}\right)dy = y+\frac{1}{2}\cdot\log(|y-1|)-\frac{1}{2}\cdot\log(|y+1|)$$

Risalendo a ritroso dalla variabile y alla variabile $t,$ otteniamo che

$$-\sqrt{1-t^2}\cdot\log(t) + \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,dt = -\sqrt{1-t^2}\cdot\log(t) + \sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\cdot\left[\log\left(\left|\sqrt{1-t^2}-1\right|\right)-\log\left(\left|\sqrt{1-t^2}+1\right|\right)\right]$$

da cui, risalendo alla variabile $x,$ otteniamo infine che

$$\int \sin(x)\cdot\log(\sin(x))\,dx = -\cos(x)\cdot\log(\sin(x))+\cos(x)+\frac{1}{2}\cdot[\log(|\cos(x)-1|)-\log(|\cos(x)+1|)]$$

Da uno studio approssimativo della funzione integranda si vede che essa, nell'intervallo [0,π], è sempre negativa, eccetto che in 0, π/2, π dove assume il valore 0. Inoltre essa risulta simmetrica rispetto all'asse $x=\dfrac{\pi}{2}$ e pertanto l'ntegrale dato è uguale a

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cdot\log(\sin(x))\,dx = 2\cdot\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cdot\log(\sin(x))\,dx =$$

$$2\cdot\left[-\cos(x)\cdot\log(\sin(x))+\cos(x)+\frac{1}{2}\cdot[\log(|\cos(x)-1|)-\log(|\cos(x)+1|)]\right]_0^{\pi/2} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} 2\cdot\left[+\cos(x)\cdot\log(\sin(x)) - \cos(x) - \frac{1}{2}\cdot[\log(|\cos(x)-1|) - \log(|\cos(x)+1|)]\right] =$$

$$\lim_{x\to 0^+} 2\cdot\left[\cos(x)\cdot\log(x) - \cos(x) - \frac{1}{2}\left[\log\left(\left|\frac{-x^2}{2}\right|\right) - \log\left(\left|2+\frac{x^2}{2}\right|\right)\right]\right] =$$

$$\lim_{x\to 0^+} 2\cdot\left[\cos(x)\cdot\log(x) - \cos(x) - \left[\log(x) - \log(\sqrt{2}) - \log\left(\sqrt{2+\frac{x^2}{2}}\right)\right]\right] =$$

$$\lim_{x\to 0^+} 2\cdot\left[(\cos(x)-1)\cdot\log(x) - \cos(x) + \log(\sqrt{2}) + \log\left(\sqrt{2+\frac{x^2}{2}}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to 0^+} 2\cdot\left[\left(\frac{-x^2}{2}\right)\cdot\log(x) - \cos(x) + \log(\sqrt{2}) + \log\left(\sqrt{2+\frac{x^2}{2}}\right)\right] = 2\cdot[-1 + \log(2)] = \log(4) - 2$$