

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 10 Gennaio 2017

1. Consideriamo la funzione $f(x, y, z) = x - 2y + z$ e l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq y \leq 1\}.$$

Determinare estremo inferiore/superiore di $f(x, y, z)$ al variare di $(x, y, z) \in A$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

2. Sia B il cerchio in \mathbb{R}^2 con centro nell'origine e raggio unitario.

Studiare la convergenza degli integrali impropri

$$\int_B \frac{1}{x^2 + y^2 + x^2 y^2} dx dy, \quad \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B} \frac{1}{x^2 + y^2 + x^2 y^2} dx dy.$$

3. Per ogni numero naturale n consideriamo il sistema

$$\begin{cases} ny + y^2 = 1 - \sin x, \\ n(x^2 - 2x + y^2) = 1. \end{cases}$$

- (a) Dimostrare che per ogni n sufficientemente grande il sistema ammette almeno una soluzione (x_n, y_n) .
- (b) Determinare se possiamo scegliere (x_n, y_n) in maniera tale che la serie $\sum x_n y_n$ converga.
- (c) Determinare se possiamo scegliere (x_n, y_n) in maniera tale che la serie $\sum x_n y_n$ diverga.
4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = (u + 3)(u - t), \quad u(0) = \alpha > 0.$$

- (a) Determinare se esistono valori positivi di α per cui il problema ha soluzione globale.
- (b) Determinare se esistono valori positivi di α per cui il problema non ha soluzione globale.
- (c) (Bonus question) Discutere esistenza/unicità di eventuali valori positivi di α per cui esiste finito il

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \cdot (u(t) - t).$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.