Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Prova in Itinere di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. Sia $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^8 \leq y \leq x^9 \leq e^9\}$. Calcolare
$$\int_D \frac{3}{y}\, dx\, dy.$$

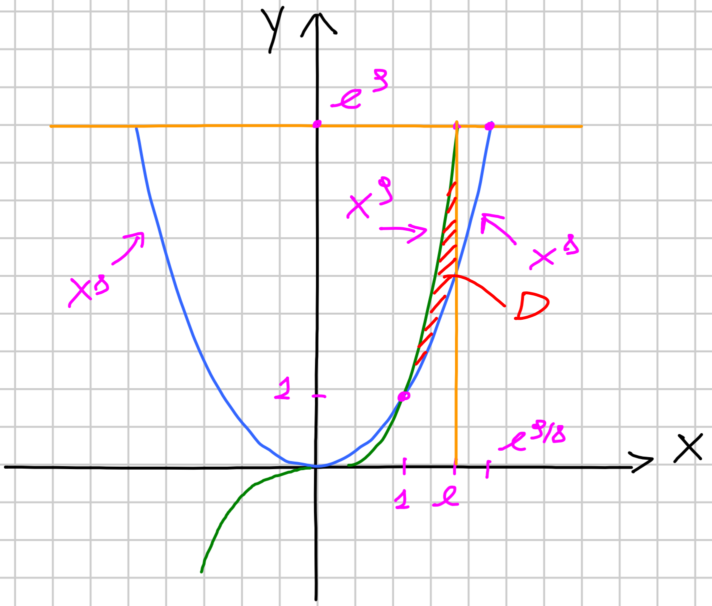
2. Sia $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + 3z \leq 1\}$. Calcolare
$$\int_V |x - y|\, dx\, dy\, dz.$$

3. Sia γ la curva di R^3 definita da $\gamma(t) = (\sin t,\ \sin(2t),\ t^4)$ per $-\pi \leq t \leq \pi$. Stabilire se γ è chiusa e/o semplice e determinare la retta tangente nel punto della curva corrispondente a $t = 0$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Sia $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^8 \leq y \leq x^9 \leq e^9\}$. Calcolare

$$\int_D \frac{3}{y}\, dx\, dy.$$



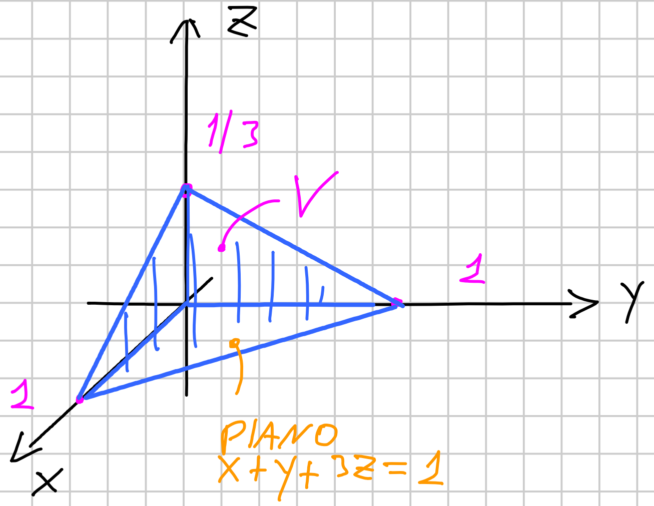
$$\int_D \frac{3}{y}\, dx\, dy = \int_1^e dx \int_{x^8}^{x^9} \frac{3}{y}\, dy = 3\int_1^e [\log y]_{x^8}^{x^9}\, dx =$$

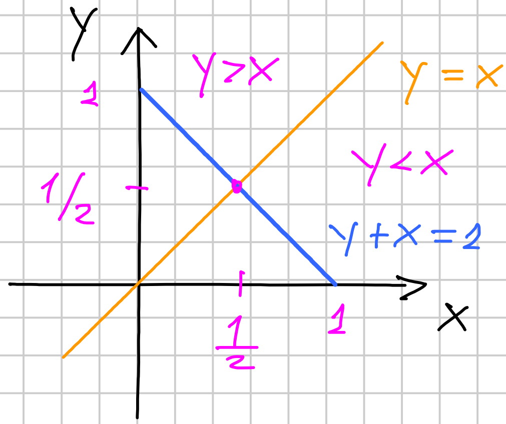
$$= 3\int_1^e \log x^9 - \log x^8\, dx = 3\int_1^e \log x\, dx =$$

$$= 3[x\log x - x]_1^e = 3(e - e + 1) = 3$$

2. Sia $V := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+3z\le 1\}$. Calcolare

$$\int_V |x-y|\,dx\,dy\,dz.$$





$|x-y|$ É SIMMETRICA RISPETTO AL PIANO VERTICALE $y-x=0$

$$\int_V |x-y|\,dx\,dy\,dz = 2\int_{\substack{V\\ y\ge x}} (y-x)\,dx\,dy\,dz =$$

$$=2\int_0^{1/2}dx\int_x^{1-x}dy\int_0^{(1-x-y)/3}(y-x)\,dz = 2\int_0^{1/2}dx\int_x^{1-x}(y-x)(1-x-y)/3\,dy =$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{1/2}dx\int_x^{1-x} y-\cancel{xy}-y^2-x+x^2+\cancel{xy}\,dy =$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{1/2}\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-xy+x^2y\right]_x^{1-x}dx =$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{1/2}\Big(\frac{1}{2}+\cancel{\frac{x^2}{2}}-\cancel{x}-\frac{1}{3}+\frac{x^3}{3}-\cancel{x^2}+\cancel{x}-x+x^2+\cancel{x^2}-x^3-\cancel{\frac{x^2}{2}}+$$
$$+\frac{x^3}{3}+x^2-x^3\Big)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{1/2} \left(-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{6}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[-\frac{x^4}{3} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x\right]_0^{1/2} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{48} + \frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{-1+4-6+4}{48}\right) = \frac{1}{72}$$

3. Sia γ la curva di R^3 definita da $\gamma(t) = (\sin t, \sin(2t), t^4)$ per $-\pi \leq t \leq \pi$. Stabilire se γ è chiusa e/o semplice e determinare la retta tangente nel punto della curva corrispondente a $t = 0$.

$$\gamma(-\pi) = (0, 0, \pi^4) = \gamma(\pi) = (0, 0, \pi^4)$$

$\rightsquigarrow$ γ È CHIUSA

$$\begin{cases} \gamma(t) = \gamma(s) \\ t \neq s \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin t = \sin s \\ \sin 2t = \sin 2s \\ t^4 = s^4 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \sin t = -\sin t \\ \sin 2t = -\sin 2t \\ t = -s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin t = 0 \\ \sin 2t = 0 \\ t = -s \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 0 \quad t = \pm\pi \\ t = -s \end{cases} \rightsquigarrow t = s = 0$$

$\rightsquigarrow$ γ È SEMPLICE

$$\gamma'(t) = (\cos t, 2\cos(2t), 4t^3)$$

$$\gamma'(0) = (1, 2, 0) \qquad \gamma(0) = (0, 0, 0)$$

$$r(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0) = (s, 2s, 0)$$

EQ. PARAM.

$$\begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y - 2x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

EQ. CART.