BY GIMUSI 02/11/16

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Prova in Itinere di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. Siano $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1\}$ e $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$. Determinare estremo inferiore e superiore di f in A specificando se si tratta di minimo e/o massimo e gli eventuali punti di minimo/massimo.

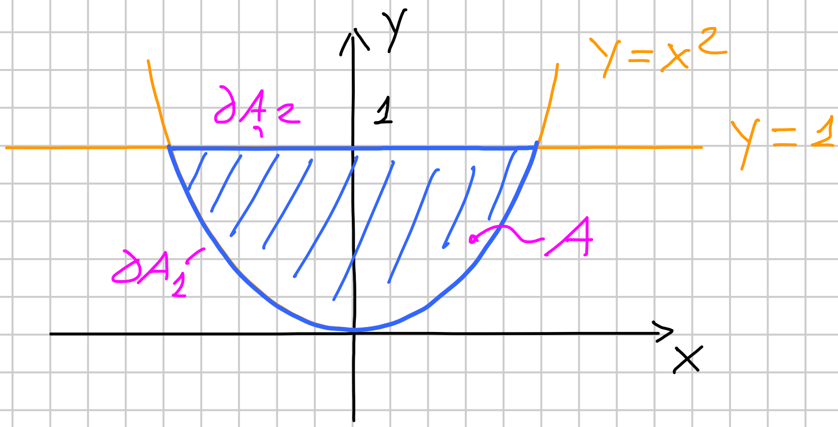
2. Sia $f(x, y) = x^2 + y^4 + xy^2$. Determinare estremo inferiore e superiore di f in $\mathbb{R}^2$ specificando se si tratta di minimo e/o massimo e gli eventuali punti di minimo/massimo.

3. Siano $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3,\ y \geq 0\}$ e $f(x, y, z) = x - y + z$.

   Determinare estremo inferiore e superiore di f su S specificando se si tratta di minimo e/o massimo e gli eventuali punti di minimo/massimo.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Siano $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 1\}$ e $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$. Determinare estremo inferiore e superiore di f in A specificando se si tratta di minimo e/o massimo e gli eventuali punti di minimo/massimo.



$$\begin{cases} A \text{ É COMPATTO } \wedge f \text{ É CONTINUA} \\ \Rightarrow \times \text{ WEIERSTRASS } f \text{ AMMETTE MAX E MIN} \end{cases}$$

PUNTI INTERNI

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y-2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \in \partial A$$

$\rightsquigarrow$ NON CI SONO PUNTI STAZIONARI INTERNI

PUNTI SUL BORDO $\quad \partial A = \partial A_1 \cup \partial A_2$

$$\partial A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y = x^2 \wedge x \in [-1,1]\}$$

$$f(x,y) = f(x,x^2) = x^2 + x^4 - 2x^2 = x^4 - x^2 = g(x)$$

$$g'(x) = 4x^3 - 2x = 0 \qquad x(4x^2-2) = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

PAPABILI PUNTI DI MAX/MIN $\in \partial A_1$:

$\rightsquigarrow P_1 = (0,0) \qquad P_2(\sqrt{2}/2, 1/2) \qquad P_3(-\sqrt{2}/2, 1/2)$

$$\partial A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y = 1 \ \wedge \ x \in [-1, 1]\}$$

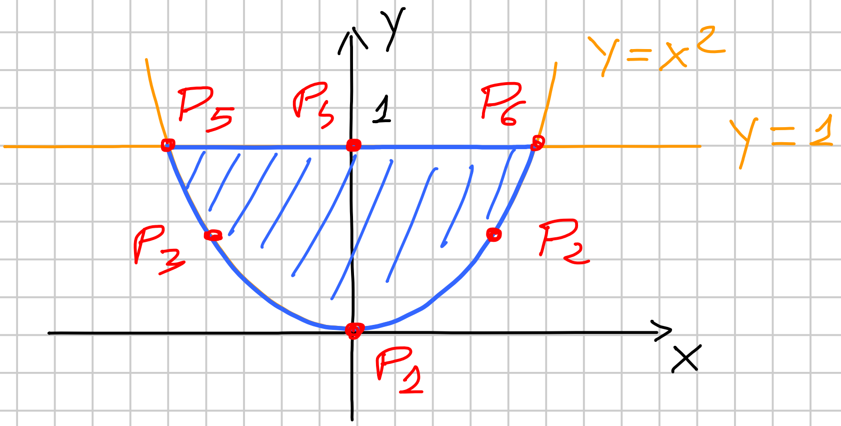
$$f(x,y) = f(x,1) = x^2 + 1 - 2 = x^2 - 1 = g(x)$$

$$g'(x) = 2x = 0 \qquad x = 0$$

PAPABILI PUNTI DI MAX/MIN $\in \partial A_2$: $\quad P_4 = (0,1)$

SI DEVONO CONSIDERARE POI I PUNTI $\in \partial A_1 \cap \partial A_2$:

$\rightsquigarrow \quad P_5 = (-1,1) \qquad P_6\ (1,1)$



$$\begin{cases} f(P_1) = 0 \\ f(P_2) = f(P_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{4} \\ f(P_4) = 0 + 1 - 2 = -1 \\ f(P_5) = f(P_6) = 1 + 1 - 2 = 0 \end{cases}$$

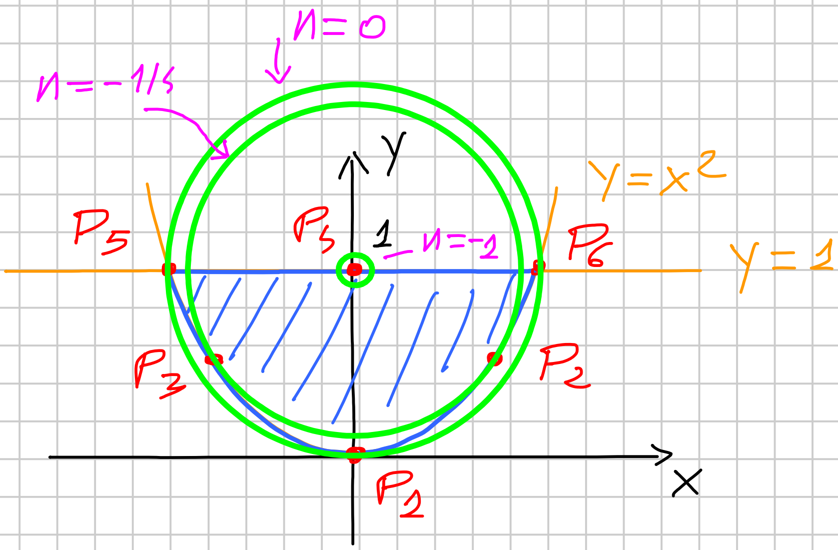
$$\rightsquigarrow \begin{cases} \mathrm{INF}(f) = \mathrm{MIN}(f) = -1 & P_{MIN} = P_4 \\ \mathrm{SUP}(f) = \mathrm{MAX}(f) = 0 & P_{MAX} = P_{1,5,6} \end{cases}$$

INTERPRETAZIONE MEDIANTE STUDIO CON LE LINEE DI LIVELLO

$$f(x,y) = x^2+y^2-2y = x^2+(y-1)^2-1 = K$$

$$x^2+(y-1)^2 = k+1$$

CIRCONFERENZA CON CENTRO IN $C \equiv P_4(0,1)$ E RAGGIO $R = \sqrt{k+1}$



2. Sia $f(x, y) = x^2 + y^4 + xy^2$. Determinare estremo inferiore e superiore di f in $\mathbb{R}^2$ specificando se si tratta di minimo e/o massimo e gli eventuali punti di minimo/massimo.

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y=0}} f(x,y) = +\infty \quad \rightsquigarrow \quad \sup(f) = +\infty$$

$\underline{x \geq 0}$

$$f(x,y) = x^2 + y^4 + xy^2 = (x - y^2)^2 + 3xy^2 =$$

$$= (x - y^2)^2 + (\sqrt{3}\sqrt{x}\, y)^2 \geq 0$$

$$f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} x - y^2 = 0 \\ \sqrt{x}\, y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow & x = 0 \implies y = 0 \\ \searrow & y = 0 \implies x = 0 \end{matrix}$$

$$f(x,y) = x^2 + y^4 + xy^2 = \left(x + \frac{y^2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^4 \geq 0$$

$$f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} x + y^2/2 = 0 \\ y^4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) \geq 0$$

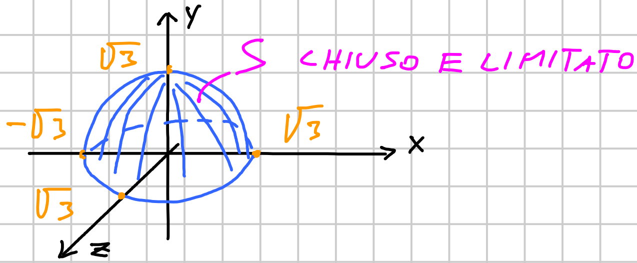
$$f(x,y) = 0 \iff x = y = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad \inf(f) = \min(f) = 0 \quad P_{MIN} = (0,0)$$

3. Siano $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 3,\ y \geq 0\}$ e $f(x,y,z) = x - y + z$.

Determinare estremo inferiore e superiore di f su S specificando se si tratta di minimo e/o massimo e gli eventuali punti di minimo/massimo.

$$\begin{cases} S \text{ É COMPATTO} \\ f \text{ É CONTINUA} \end{cases}$$



$\Rightarrow$ X WEIERSTRASS f AMMETTE MAX E MIN

METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

VINCOLI $\begin{cases} \Phi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3 = 0 \\ y > 0 \end{cases}$

SISTEMA 1: $\begin{cases} \Phi_x = 2x = 0 \\ \Phi_y = 2y = 0 \\ \Phi_z = 2z = 0 \\ x^2+y^2+z^2-3 = 0 \quad (y>0) \end{cases} \rightsquigarrow \emptyset$

SISTEMA 2: $\begin{cases} f_x = 1 = \lambda \Phi_x = 2\lambda x \\ f_y = -1 = \lambda \Phi_y = 2\lambda y \\ f_z = 1 = \lambda \Phi_z = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2-3 = 0 \quad (y>0) \end{cases}$

$\lambda \neq 0$ ($\lambda = 0$ NON É SOLUZIONE)

$x = z = 1/(2\lambda) \quad y = -1/(2\lambda)$

$(1/2\lambda)^2 + (-1/2\lambda)^2 + (1/2\lambda)^2 - 3 = 0 \qquad 3 - 12\lambda^2 = 0$

$\lambda^2 = 1/4 \qquad \lambda = \pm 1/2 <$
$1/2 \quad x = z = 1 \quad y = -1$
$-1/2 \quad x = z = -1 \quad y = 1$

$\rightsquigarrow P_2 = (-1, 1, -1)$

<u>VINCOLI</u>
$$\begin{cases} \Phi_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3=0 \\ \Phi_2(x,y,z) = y = 0 \end{cases}$$

SISTEMA 1:
$$\begin{cases} \nabla\Phi_1 = (2x, 2y, 2z) \\ \nabla\Phi_2 = (0, 1, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{RANGO} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \\ \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2z = 0 \\ x^2+y^2+z^2-3=0 \\ y = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \emptyset$$

SISTEMA 2: $\nabla f = \lambda \nabla\Phi_1 + \mu\nabla\Phi_2$

$$\begin{cases} f_x = 1 = 2\lambda x \\ f_y = -1 = 2\lambda y + \mu \\ f_z = 1 = 2\lambda z \\ \Phi_1 = x^2+y^2+z^2-3=0 \\ \Phi_2 = y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ \mu = -1 \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2+z^2-3=0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\lambda \neq 0$ ($\lambda = 0$ NON È SOLUZIONE)

$$x = z = 1/(2\lambda) \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 - 3 = 0$$

$$2 - 12\lambda^2 = 0 \qquad \lambda = \pm 1/\sqrt{6}$$

$$\rightsquigarrow P_2 = (\sqrt{6}/2, 0, \sqrt{6}/2) \qquad P_3 = (-\sqrt{6}/2, 0, -\sqrt{6}/2)$$

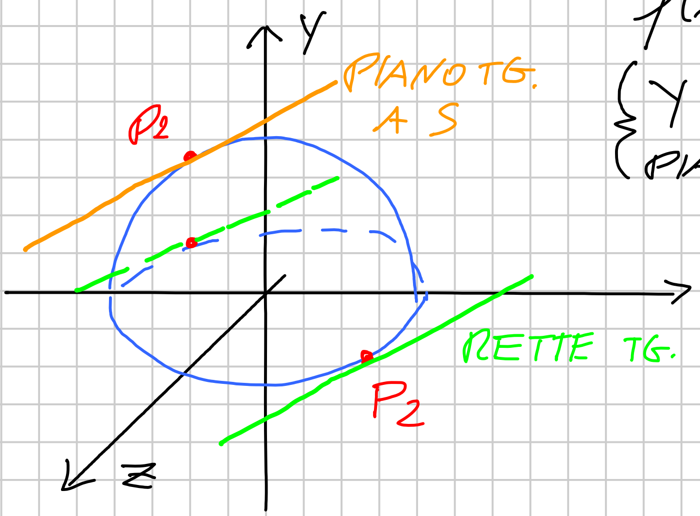
$$\begin{cases} f(P_2) = -1-1-1 = -3 \\ f(P_2) = \sqrt{6}/2 + 0 + \sqrt{6}/2 = \sqrt{6} \\ f(P_3) = -\sqrt{6}/2 + 0 - \sqrt{6}/2 = -\sqrt{6} > -3 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \sup(f) = \max(f) = \sqrt{6} & P_{MAX} = P_2 \\ \inf(f) = \min(f) = -3 & P_{MIN} = P_2 \end{cases}$$

INTERPRETAZIONE MEDIANTE STUDIO CON LE "LINEE" DI LIVELLO

$f(x,y,z) = x - y + z = \lambda$

$\begin{cases} y > 0 \\ \text{PIANI CON NORMALE } (1,-1,1) \end{cases}$



$\begin{cases} y = 0 \\ \text{RETTE } x + z = \lambda \end{cases}$

MODO ALTERNATIVO PIÙ SEMPLICE PER $y = 0$

$$\begin{cases} g(x,z) = f(x,0,z) = x + z \\ S' = S \cap (y=0) = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 = 3\} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ METODO CON LINEE DI LIVELLO