I seguenti limiti possono essere calcolati senza usare teoremi non ancora disponibili nelle prime settimane del corso di Analisi Matematica 1, in particolare **SENZA** gli sviluppi di **TAYLOR** e **SENZA** la formula di **STIRLING**.

11) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{n}}+n!}{(n+2)^n-n^n}$

$$\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{n}}+n!}{(n+2)^n-n^n}=\frac{n^n}{n^n}\,\frac{\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{n}}}{n^n}+\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+2)^n}{n^n}-1}=$$

$$=\frac{\frac{(n+1)^n}{n^n}(n+1)^{\frac{1}{n}}+\frac{n!}{n^n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n-1}=\frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}^{\to e}\overbrace{(n+1)^{1/n}}^{\to 1}+\overbrace{\frac{n!}{n^n}}^{\to 0}}{\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}_{\to e^2}-1}\to\frac{e}{e^2-1}$$

In ciascuna delle terne di successioni proposte in seguito stabilire quali sono le successioni che hanno ordine di infinito più alto e più basso. $\boxed{\text{NON USARE STIRLING}}$

12) $a_n = (n^2)!$ $\quad b_n = (n!)^2$ $\quad c_n = n^{2n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(n^2)!}{(n!)^2} \geq \frac{(n^2)!}{(n^n)^2} = \frac{(n^2)!}{n^{2n}} = \frac{a_n}{c_n} \to +\infty$$

INFATTI:

MODO 1 (DIRETTO)

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{(n^2)!}{n^{2n}} = \frac{(n^2)!}{(n^2)^n} = \underbrace{\frac{n^2(n^2-1)(n^2-2)\dots(n^2-n+1)}{n^2\cdot n^2\cdot n^2\cdot \dots \cdot n^2}}_{\to 1} \underbrace{(n^2-n)!}_{\to +\infty} \to +\infty$$

MODO 2 (CRITERIO DEL RAPPORTO)

$$d_n = \frac{a_n}{c_n} \qquad \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{c_{n+1}}{a_{n+1}}\,\frac{a_n}{c_n} =$$

$$= \frac{[(n+1)^2]!}{(n+1)^{2(n+1)}}\,\frac{n^{2n}}{n^2!} = \frac{[(n+1)^2]!}{n^2!}\cdot\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2(n+1)}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\cancel{(n+1)^2}[(n+1)^2-1]\dots[(n+1)^2-2n]\cdot\cancel{n^2!}}{\cancel{n^2!}}}_{\to +\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}}_{\to 1/e^2} \frac{1}{\cancel{(n+1)^2}} \to +\infty$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^2 \to \frac{1}{e^2}$$

$$\frac{b_n}{c_n} = \frac{(n!)^2}{n^{2n}} = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^2 \to 0$$

$$\leadsto \quad a_n > c_n > b_n$$
$$(n^2)! > n^{2n} > (n!)^2$$

Ricordando il limite notevole $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}}$ dimostrare che per $x \to 0$ si ha:

13) $\tan x = x + O(x^3)$

$$\tan x = x + O(x^3) \qquad \tan x - x = O(x^3)$$

SE $\exists K > 0$ δ.c. $\left| \dfrac{\tan x - x}{x^3} \right| < K$

$$\frac{\tan x - x}{x^3} = \underbrace{\frac{\tan x - \sin x}{x^3}}_{\to 1/2} + \underbrace{\frac{\sin x - x}{x^3}}_{\to -1/6} \to 1/3$$