

Scritto d'esame di Elementi di Calcolo delle Variazioni

Pisa, 6 Settembre 2016

1. Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 [(\dot{u} - x)^2 + (u - x)^2] dx.$$

Studiare il problema di minimo per $F(u)$ con ciascuna delle seguenti condizioni al bordo:

- (a) nessuna condizione,
- (b) $u'(1) = 0$.

2. Discutere esistenza, unicità e regolarità per il problema

$$\ddot{u} = \frac{u(u^2 + 1)}{\dot{u}^2 + 1}, \quad u'(0) = u'(1) = 1.$$

3. Consideriamo, per ogni numero reale k , il problema di minimo

$$\min \left\{ \int_0^3 (\dot{u}^4 - k \sin(u^2) + u^6) dx : u(0) = u(3) = 0 \right\}.$$

- (a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il problema di minimo ha soluzione.
- (b) Determinare per quali valori $k \geq 0$ il valore del minimo (esiste ed) è negativo.

4. Consideriamo, per ogni numero reale $\ell > 0$, il problema di minimo

$$\min \left\{ \int_0^\ell [\sin(\dot{u}^2) + \cos u] dx : u(0) = u(\ell) = 0 \right\}.$$

- (a) Determinare per quali $\ell > 0$ la funzione $u_0(x) \equiv 0$ è un punto di minimo locale debole (WLM).
- (b) Determinare per quali $\ell > 0$ la funzione $u_0(x) \equiv 0$ è un punto di minimo locale forte (SLM).
- (c) Determinare per quali $\ell > 0$ il problema di minimo ha soluzione.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.