

Scritto d'esame di Elementi di Calcolo delle Variazioni

Pisa, 28 Giugno 2016

1. Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 - 7x\dot{u} - 10u) dx.$$

Studiare il problema di minimo per $F(u)$ con ciascuna delle seguenti condizioni al bordo:

- (a) $u(0) = u(1) = 0$,
- (b) $u'(0) = u'(1) = 5$.

2. Discutere esistenza, unicità e regolarità per il problema

$$\ddot{u} = u^5 - x^{55}, \quad u'(0) = 555, \quad u(1) = 0.$$

3. Consideriamo, per ogni numero reale $\ell > 0$, il problema di minimo

$$\min \left\{ \int_0^\ell (\dot{u}^2 - u \sin u + u^6) dx : u(0) = u(\ell) = 0 \right\}.$$

- (a) Determinare per quali valori di ℓ il problema di minimo ha soluzione.
- (b) Determinare per quali valori di ℓ il valore del minimo (esiste ed) è negativo.

4. (a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 2$ esiste

$$M_n = \min \left\{ \int_0^1 (|\dot{u}|^n + (u - x)^{22} + e^{-nu}) dx : u(0) = u(1) = 0 \right\}.$$

- (b) Calcolare il limite di M_n per $n \rightarrow +\infty$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.