Svolgimento quesito b).

Esso ci chiede di trovare una funzione $u(t)$, continua e con derivate prime continue su tutto $\mathbb{R}$, che soddisfa l'equazione data, assicurandoci peraltro che essa è unica.
La funzione, soluzione generale dell'eq. diff. ricavata è definita per ogni $t \neq 0$, quindi vediamone il comportamento in prossimità di quel punto calcolando il limite seguente:

$$\lim_{t\to 0} u(t) = \lim_{t\to 0} \frac{c + 2t\cos(t) - 2\sin(t)}{t^2} + \sin(t) =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{c + 2t(1 - t^2/2) - 2(t - t^3/6) + o(t^3)}{t^2} + \sin(t) =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{c + \cancel{2t} - t^3 - \cancel{2t} + t^3/3 + o(t^3)}{t^2} + \sin(t) =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{c}{t^2} - \frac{2}{3}t + \sin(t) + o(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } c = 0 \\ +\infty & \text{per } c > 0 \\ -\infty & \text{per } c < 0 \end{cases}$$

Quindi, l'unica possibilità affinché la funzione cercata sia di classe $C^1(\mathbb{R})$ è quella di assumere $c = 0$. In tal caso infatti essa presenta una discontinuità eliminabile in $t=0$, assumendo il valore del suo limite in quel punto, cioè 0.
Pensando di aver trovato la funzione richiesta e sapendo che essa è unica, a rigor di logica l'esercizio è terminato. Tuttavia, il quesito specifica che $u(t)$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$ e quindi dovrei applicare lo stesso ragionamento anche ad $u'(t)$, ottenendo conferma di quanto già ricavato. Concludendo, è

$$u(t) = \sin(t) + \frac{2}{t}\cos(t) - \frac{2}{t^2}\sin(t).$$