$u'' - 2u' + 2u = e^t \sin(t)$

Soluzione dell'eq. omogenea associata $u'' - 2u' + 2u = 0$:

Polinomio caratt.: $x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow$ Radici polinomio: $x_1 = 1 - i$, $x_2 = 1 + i \Rightarrow$

$u_0(t) = c_1 e^t \cos(t) + c_2 e^t \sin(t)$

Ricerca soluzione particolare dell'eq. non omogenea:

Tentativo con $u_1(t) = t e^t (a \cos(t) + b \sin(t))$

$$u_1'(t) = e^t (1+t)[a\cos(t) + b\sin(t)] + te^t(-a\sin(t) + b\cos(t)) = e^t \{ t[(a+b)\cos(t) + (b-a)\sin(t)] + (a\cos(t) + b\sin(t)) \}$$

$$u_1''(t) = e^t \{ t[(a+b)\cos(t) + (b-a)\sin(t)] + [a\cos(t) + b\sin(t)] \} + e^t \{ [(a+b)\cos(t) + (b-a)\sin(t)] + t[-(a+b)\sin(t) + (b-a)\cos(t)] - a\sin(t) + b\cos(t) \}$$

Dopo noiosi passaggi algebrici otteniamo che

$$u_1''(t) = e^t \{ t[2b\cos(t) - 2a\sin(t)] + 2(a+b)\cos(t) + 2(b-a)\sin(t) \}$$

Sostituendo nell'eq. diff. assegnata, troviamo che:

$$\cancel{e^t} \{ t[2b\cos(t) - 2a\sin(t)] + 2(a+b)\cos(t) + 2(b-a)\sin(t) \} -$$

$$- 2\cancel{e^t} \{ t[(a+b)\cos(t) + (b-a)\sin(t)] + [a\cos(t) + b\sin(t)] \} +$$

$$+ 2t\cancel{e^t} [a\cos(t) + b\sin(t)] = \cancel{e^t} \sin(t)$$

Adesso, i termini che hanno coefficiente t devono annullarsi:

$$\cancel{2b\cos(t)} - \cancel{2a\sin(t)} - \cancel{2a\cos(t)} - \cancel{2b\cos(t)} - \cancel{2b\sin(t)} + \cancel{2a\sin(t)} + \cancel{2a\cos(t)} + \cancel{2b\sin t} = 0$$

Rimangono i termini con coefficienti $\sin(t)$ e $\cos(t)$, da cui segue che:

$$\begin{cases} 2(a+b) - 2a = 0 \\ 2(b-a) - 2b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{2a} + 2b - \cancel{2a} = 0 \\ \cancel{2b} - 2a - \cancel{2b} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = -1/2 \end{cases}$$

Dunque, il tentativo ha dato come risultato $u_1(t) = -\frac{1}{2} t e^t \cos(t)$

e la soluzione generale dell'eq. assegnata è data da

$$u(t) = c_1 e^t \cos(t) + c_2 e^t \sin(t) - \frac{1}{2} t e^t \cos(t)$$