Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Elementi di Calcolo delle Variazioni

Pisa, 23 Febbraio 2016

Esercizio 1. Consideriamo il funzionale:

$$F(u) = \int_0^1 \dot{u}^2 - 7\dot{u} + x^3 u \; dx$$

Studiare il problema di minimo per $F(u)$ con la condizione al bordo $u(0) = 0$.

Soluzione. Proviamo a minimizzare $F(u)$ nello spazio seguente:

$$X = \{u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = 0\}$$

Il minimo, se esiste in X, deve soddisfare:

$$\frac{d}{dt} F(u + tv)\bigg|_{t=0} = 0$$

per ogni $v \in V$, con V giacitura di X (X è uno spazio vettoriale, quindi in questo caso $V = X$). Da qui si ottiene, in sostanza, la prima forma integrale di Eulero:

$$\int_0^1 2(2\dot{u} - 7)\dot{v} + x^3 v \; dx = 0$$

Supponendo che sia $u \in C^2([0,1])$, integrando per parti si ottiene la seconda forma integrale di Eulero:

$$[(2\dot{u} - 7)v]_0^1 + \int_0^1 -2\ddot{u}v + x^3 v \; dx = 0$$

$$[2\dot{u}(1) - 7]v(1) + \int_0^1 -2\ddot{u}v + x^3 v \; dx = 0$$

Restringendosi allora al sottospazio W di V seguente:

$$W = \{v \in C^1([0,1]) \mid v(0) = v(1) = 0\}$$

si ha che u, se esiste, dev'essere soluzione della seguente equazione differenziale di Eulero:

$$2\ddot{u} = x^3$$

È facile rendersi conto che la soluzione è della forma:

$$u(x) = \frac{1}{40}x^5 + ax + b \; ,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. In realtà, imponendo $u(0) = 0$, si ha che $b = 0$.

La seconda forma integrale diventa allora:

$$[2\dot{u}(1) - 7]v(1) + \int_0^1 (-2\ddot{u} + x^3)v \; dx = [2\dot{u}(1) - 7]v(1) = 0$$

Per arbitrarietà di $v \in V$, allora (dato che esistono $v \in V \smallsetminus W$ con $v(1) \neq 0$), bisogna imporre la seguente condizione su $\dot{u}$:

$$2\dot{u}(1) = 7$$

$$\dot{u}(1) = \frac{7}{2}$$

Bisogna allora imporre:

$$a = \frac{7}{2} - \frac{1}{8} = \frac{27}{8}$$

Sia quindi u la soluzione trovata: dato che la funzione integranda è convessa in (s,p) per ogni $x \in [0,1]$ fissato, essa è un minimo, ed è l'unico punto di minimo per F, visto che la convessità è stretta nella variabile p (omettiamo i dettagli: si potrebbe anche fare una dimostrazione esplicita).

Il minimo, dunque, è $F(u)$ (omettiamo i conti).

Esercizio 2. Discutere esistenza, unicità e regolarità per il problema:

$$\begin{cases} \ddot{u} = \frac{u^3}{\cos(x)} \\ u(0) = 2016 \\ u(1) = 2016 \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione proposta è l'equazione differenziale di Eulero del seguente funzionale:

$$F(u) = \int_0^1 \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{u^4}{4\cos(x)}\ dx$$

Notiamo che il coseno è maggiore o uguale di una certa costante positiva tra 0 e 1 (nella fattispecie, $\cos(1) \geq 0.5$), dunque non vi sono integrali impropri in gioco, e tutto è perfettamente ben definito.

Se dunque tale funzionale ammette punti estremali (con le condizioni al bordo assegnate), l'equazione ha soluzione.

Notiamo subito che, per ogni $x \in [0,1]$ fissato, la funzione integranda:

$$\psi_x(s,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{s^4}{4\cos(x)}$$

è strettamente convessa in (s,p), dunque ogni punto estremale è un minimo (visto che c'è convessità), e l'eventuale minimo è unico (visto che la convessità è stretta). Se dunque la soluzione esiste, essa è unica.

Cerchiamo ora di usare il metodo diretto per garantire l'esistenza e la regolarità del punto di minimo. Formuliamo innanzitutto il problema nello spazio seguente:

$$X = \{\ u \in H^1([0,1])\ \mid\ u(0) = u(1) = 2016\ \}$$

Le condizioni al bordo, come sappiamo, hanno senso in questo spazio.

Cerchiamo ora una nozione di convergenza che renda compatti i sottolivelli e semicontinuo il funzionale, in modo da poter applicare il teorema di Weierstrass e concludere. Sia $u \in \Lambda_M$, con:

$$\Lambda_M = \{\ u \in X\ \mid\ F(u) \leq M\ \}$$

Allora si ha banalmente:

$$||\dot{u}||^2_{L^2} \leq 2M = \eta_1$$

Dunque $u \in C^{0,1/2}([0,1])$. Infatti per ogni $x, y \in [0,1]$, supponendo che $x < y$, si ha:

$$|u(y) - u(x)|\ =\ \left|\int_x^y \dot{u}(s)\ ds\right|\ \leq\ \int_x^y |\dot{u}(s)|\ ds\ \leq$$

$$\leq\ |y-x|^{1/2}||\dot{u}||_{L^2}\ \leq\ \sqrt{\eta_1}|y-x|^{1/2}$$

Inoltre, per ogni $x \in [0,1]$:

$$|u(x)|\ \leq\ u(0) + |x|^{1/2}\sqrt{\eta_1}\ \leq\ 2016 + \sqrt{\eta_1}\ =\ \eta_2\ ,$$

da cui $||u||_{C^0} \leq \eta_2$.

In sostanza, usando la debole compattezza della palla unitaria in $L^2([0,1])$ e il teorema di Ascoli-Arzelà, si dimostra che i sottolivelli sono compatti rispetto alla seguente nozione di convergenza, che peraltro rende inferiormente semicontinuo il funzionale:

$$\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \to_{||\cdot||_\infty} u_\infty \\ (\dot{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \rightharpoonup \dot{u}_\infty \end{cases}$$

In particolare, la convergenza uniforme assicura che sia $u_\infty \in X$.

Resta allora da discutere la regolarità della soluzione trovata. Per ogni $v \in C_c^\infty(]0,1[)$ si ha:

$$\int_0^1 \dot{u}\dot{v} + \frac{u^3}{\cos(x)} v \; dx = 0$$

$$\int_0^1 \dot{u}\dot{v} \; dx = -\int_0^1 \frac{u^3}{\cos(x)} v \; dx$$

Dunque $\dot{u}$ ammette derivata debole continua, quindi $\dot{u} \in C^1([0,1])$ e $u \in C^2([0,1])$. A questo punto, tramite *bootstrap*, si conclude che $u \in C^\infty([0,1])$.

La soluzione, pertanto, esiste ed è unica, ed appartiene a $C^\infty([0,1])$.

Esercizio 3. Consideriamo, per ogni numero reale $l > 0$, il seguente funzionale:

$$\min \left\{ \; F_l(u) = \int_0^l \dot{u}^2 - \sin^2(u) \; dx \; \middle| \; u(0) = u(l) = 0 \; \right\}$$

- Determinare per quali valori di l il problema di minimo ha soluzione.
- Determinare per quali valori di l il valore del minimo (esiste ed) è negativo.
- Stabilire se esistono valori di l per cui il valore del minimo è esattamente -2016.

Soluzione. Per il primo punto, un'applicazione standard del metodo diretto assicura l'esistenza del minimo per ogni $l > 0$. In particolare, si usano: la limitatezza della funzione seno per ottenere la limitazione sulla derivata; uno dei due dati al bordo per ottenere la limitazione sulla funzione; *bootstrap* per ottenere regolarità, dopo aver dimostrato (facilmente) che il minimo è di classe C^2. Non diamo ulteriori dettagli a riguardo.

Passiamo ora al secondo punto. Come prima osservazione, è banale notare che per ogni $l \in \mathbb{R}$ il minimo cercato è finito, ed è sicuramente non positivo e non strettamente minore di $-l$.

Notiamo che vale, per ogni u tale che $u(0) = u(l) = 0$:

$$F_l(u) \geq G_l(u) \overset{\textbf{def}}{=} \int_0^l \dot{u}^2 - u^2 \; dx$$

La forma quadratica $G_l(u)$ (al variare di $l > 0$) è nota, ed è stato visto a lezione che:

- $G_l(u) \geq 0$ per $l \leq \pi$;
- $G_l(u) < 0$ per qualche u nulla al bordo, se $l > \pi$.

Dunque, per $l \leq \pi$, sicuramente $\min F_l = 0$. Per $l > \pi$ il minimo (che esiste per quanto detto al punto precedente) è strettamente negativo, in quanto si può dimostrare che la funzione nulla non è un minimo locale forte. Sia dunque $l = \pi + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$.

Notiamo che per ogni $\gamma > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $||u||_{C^0} \leq \delta$, ossia $||u||_\infty \leq \delta$, allora vale:

$$F_l(u) \leq H_l(u) \overset{\textbf{def}}{=} \int_0^l \dot{u}^2 - (1-\gamma)u^2 \; dx$$

Ciò deriva dal fatto che, in un intorno di 0 del tipo $[-\delta, \delta]$, con $\delta > 0$ dipendente da γ, vale:

$$\sin^2(x) \geq (1-\gamma)x^2$$

Dalla teoria svolta a lezione, si sa che il minimo di H_l è strettamente negativo se:

$$l > \frac{\pi}{\sqrt{1-\gamma}}$$

$$\pi + \varepsilon > \frac{\pi}{\sqrt{1-\gamma}} \ ,$$

da cui è evidente che, per ogni $\varepsilon > 0$, è possibile scegliere $\gamma > 0$ opportuno perchè la disequazione sia verificata in senso stretto.

Concludiamo allora che:

- $\min F_l = 0$ per $l \leq \pi$;
- $\min F_l < 0$ per $l > \pi$.

Veniamo ora all'ultimo punto, sicuramente molto meno standard dei primi due. Per quanto detto precedentemente, è ben definita la seguente funzione:

$$\phi \ :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che, per definizione, $\phi(l) = \min F_l$. In particolare, si verifica molto agilmente (perciò non ne diamo i dettagli) che ϕ è decrescente, nulla ad esempio per $l = \pi$ e tendente a $-\infty$ se $l \to +\infty$. Potremmo quindi concludere che esiste un valore l_0 tale che $\phi(l_0) = -2016$ se ad esempio dimostriamo che ϕ è continua.

Sia allora $l_0 > 0$, e sia v una funzione nulla in 0 e l_0 che realizza il minimo:

$$F_{l_0}(v) = \phi(l_0)$$

Chiamiamo v_ε la funzione (che risulta nulla in 0 e $l_0 - \varepsilon$) ottenuta mediante compressione orizzontale:

$$v_\varepsilon(x) = v\left(\frac{l_0}{l_0 - \varepsilon} x\right)$$

Allora si può dimostrare (è stato visto a lezione, anche) che:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} F_{l_0 - \varepsilon}(v_\varepsilon) = F_{l_0}(v)$$

Deduciamo allora che:

$$\lim_{l \to l_0^-} \phi(l) = \phi(l_0) \ ,$$

sfruttando tra l'altro la decrescenza di ϕ.

Cerchiamo ora di dimostrare che vale anche:

$$\lim_{l \to l_0^+} \phi(l) = \phi(l_0)$$

Sfruttando la monotonia di ϕ, è sufficiente dimostrare che non può esistere un $\gamma > 0$ tale che:

$$\lim_{l \to l_0^+} \phi(l) \leq \phi(l_0) - \gamma$$

Supponiamo allora per assurdo che un tale $\gamma > 0$ esista. Allora per ogni $l > l_0$:

$$\phi(l) \leq \phi(l_0) - \gamma$$

È sufficiente restringersi all'intorno semiaperto $U =]l_0, l_0 + 1]$, ad esempio. Dato che per ogni $l \in U$:

$$H_0^1([0, l]) = \overline{C_c^\infty(]0, l[)} \ ,$$

dove la chiusura è intesa in senso H^1, per ogni $l \in U$ esiste una funzione $w_l \in C_c^\infty(]0, l[)$ tale che:

$$F_l(w_l) = F_{l_0+1}(w_l) \leq \phi(l_0) - \frac{\gamma}{2}$$

(Notiamo che il funzionale ora è fissato, e non varia con l). Applicando le tecniche tipiche del metodo diretto, allora, esiste una sottosuccessione $(w_{l_n})_{n\in\mathbb{N}^+}$ (con $(l_n) \to l_0$) convergente a una certa funzione w, ove in particolare la convergenza è uniforme sulle funzioni (da cui si ha che $w(0) = w(l_0) = 0$). In particolare $w \equiv 0$ in $[l_0, l_0 + 1]$, da cui, sfruttando la semicontinuità del funzionale F_{l_0+1}, si ha:

$$F_{l_0+1}(w) = F_{l_0}(w) \leq \phi_{l_0} - \frac{\gamma}{2} \ ,$$

e ciò è assurdo.

Dunque:

$$\lim_{l \to l_0^+} \phi(l) = \phi(l_0) \ ,$$

e in definitiva ϕ è continua: deduciamo quindi che la risposta all'ultimo punto è affermativa, per il teorema dei valori intermedi.

Esercizio 4. Dimostrare che per ogni intero positivo n esiste:

$$M_n = \min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 + u \sin(u) \ dx \ \middle| \ u(0) = 2016, \int_0^1 u^2 \ dx = n \right\}$$

Calcolare il limite di M_n per $n \to +\infty$, e calcolare, al variare del parametro a, il limite seguente:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{M_n}{n^a}$$

Soluzione. L'esistenza di M_n, per ogni n, discende dall'applicazione del metodo diretto: non diamo ulteriori dettagli.

Operiamo una linearizzazione, ponendo:

$$u = \sqrt{n}v$$

Si ottiene allora che:

$$\frac{M_n}{n} = \min \left\{ \int_0^1 \dot{v}^2 + v\frac{\sin(\sqrt{n}v)}{\sqrt{n}} \ dx \ \middle| \ v(0) = \frac{2016}{\sqrt{n}}, \int_0^1 v^2 \ dx = 1 \right\}$$

La nuova successione di funzionali Γ-converge al funzionale seguente:

$$F(u) = \int_0^1 \dot{u}^2 \ dx \ ,$$

ristretto alle funzioni $u \in H^1([0, 1])$ che sono nulle in 0 e tali che:

$$\int_0^1 u^2 \ dx = 1$$

La liminf-inequality è abbastanza standard, perciò omettiamo i dettagli; la limsup-inequality è forse meno ovvia, perciò la discutiamo in fondo. In più è facile dimostrare che vi sia equicoercività, rispetto alla solita nozione di convergenza (uniforme sulle funzioni, debole sulle derivate): anche per questo non ne diamo i dettagli.

Il funzionale limite è molto facile da studiare. In particolare, un suo punto di minimo globale è la retta:

$$u_0(x) = \alpha x \ ,$$

dove $\alpha = \sqrt{3}$, visto che:

$$||u_0||_{L^2}^2 = \alpha^2 \frac{1}{3} = 1$$

Vale allora:

$$\min F = F(u_0) = \int_0^1 \alpha^2 \, dx = 3 \ ,$$

da cui:

$$M_n = 3n + \mathrm{o}(n) \ , \ n \to +\infty$$

Dunque:

$$\lim_{n \to +\infty} M_n = +\infty \ ,$$

e:

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{M_n}{n^a} = 0$, se $a > 1$;
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{M_n}{n^a} = 3$, se $a = 1$;
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{M_n}{n^a} = +\infty$, se $a < 1$.

Veniamo ora alla limsup-inequality (da dimostrare solo se $F(u) < +\infty$, ossia se $u(0) = 0$ e $||u||^2_{L^2} = 1$. Innanzitutto il funzionale limite F ha un'integranda convessa e a crescita quadratica: deduciamo che è sufficiente esibire l'esistenza di una recovery sequence per u affine a tratti.

Anticipiamo subito che verrà esibita una recovery-sequence composta da funzioni affini a tratti: non insistiamo sul fatto che ciò implica in ogni caso la tesi, potendo regolarizzare tale successione di funzioni in modo opportuno.

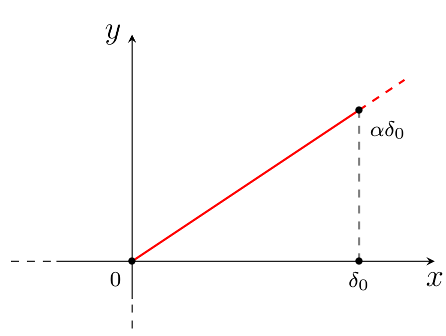
Sia dunque u affine a tratti.

Sia $\delta_0 > 0$ tale che in $[0, \delta_0]$ la funzione u ha derivata costante. Allora si ha:

$$u|_{[0,\delta_0]}(x) = \alpha x$$

Supponiamo per ora che sia $\alpha > 0$: il caso $\alpha < 0$ si discuterà in maniera esattamente analoga, e il caso $\alpha = 0$ verrà discusso più avanti.

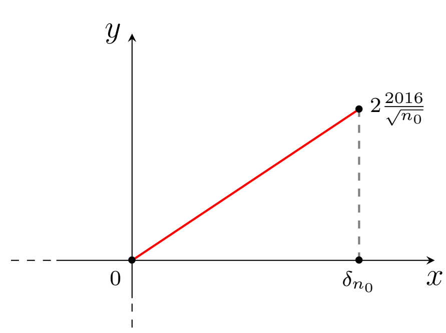
Facciamo uno *zoom* del grafico:



Per $n \geq n_0$, con n_0 opportuno, si ha:

$$\alpha\delta_0 \geq 2\frac{2016}{\sqrt{n}}$$

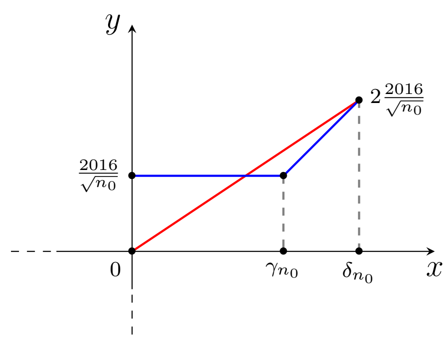
Restringendosi allora a tali indici, si ha che esiste $\delta_n \leq \delta_0$ tale che $u(\delta_n) = 2\frac{2016}{\sqrt{n}}$. Per ogni $n \geq n_0$, allora, si ha la situazione seguente:



Fissiamo ora n, ponendo $n = n_0$: l'idea è quella di costruire una funzione v_{n_0} affine a tratti, tra 0 e δ_{n_0} tale che $v_{n_0}(0) = \frac{2016}{\sqrt{n_0}}$ e $v_{n_0}(\delta_{n_0}) = 2\frac{2016}{\sqrt{n_0}}$, in modo poi da estendere a una funzione w_{n_0} affine a tratti in $[0,1]$ ponendo $w_{n_0} \equiv v_{n_0}$ in $[0, \delta_{n_0}]$ e $w_{n_0} \equiv u$ in $[\delta_{n_0}, 1]$. Dobbiamo però assicurarci che valga:

$$\int_0^{\delta_{n_0}} v_{n_0}^2 \; dx = \int_0^{\delta_{n_0}} u^2 \; dx$$

Un'idea potrebbe essere la seguente:



Dobbiamo solo assicurarci che il numero γ_{n_0} che rende vera l'uguaglianza integrale scritta sopra appartenga a $]\frac{\delta_{n_0}}{2}, \delta_{n_0}[$.

Ma ciò è vero, perchè chiaramente l'integrale diminuisce man mano che γ_{n_0} aumenta, ed è palese che:

- Per $\gamma_{n_0} = \frac{\delta_{n_0}}{2}$ vale:
$$\int_0^{\delta_{n_0}} v_{n_0}^2 \; dx > \int_0^{\delta_{n_0}} u^2 \; dx \; ;$$
- Per $\gamma_{n_0} \sim \delta_{n_0}$ vale:
$$\int_0^{\delta_{n_0}} v_{n_0}^2 \; dx < \int_0^{\delta_{n_0}} u^2 \; dx \; .$$

La prima osservazione è davvero banale, mentre la seconda si può verificare esplicitamente.

Una volta fatto questo discorso, dovrebbero essere chiare le seguenti cose:

- Una volta determinata una funzione v_{n_0} ammissibile per $n = n_0$, si può facilmente determinare, mediante riscalamento, una funzione v_n ammissibile per ogni $n > n_0$;
- La successione di funzioni $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ (ottenuta ponendo $v_n \equiv 0$ per ogni $n < n_0$), risulterà con ogni probabilità uniformemente convergente a u (basta determinare $||v_{n_0} - u||_\infty$, e notare che tale quantità tende a 0 per $n \to +\infty$);
- La successione delle derivate converge a $\dot{u}$ fortemente in $L^2([0,1])$;
- Il discorso è analogo per $\alpha < 0$.

Se $\alpha \neq 0$, dunque, abbiamo esibito una recovery-sequence: infatti la convergenza uniforme delle funzioni e quella forte in L^2 delle derivate garantiscono che valga:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(v_n) = F(u)$$

Concludiamo discutendo il caso $\alpha = 0$. In tal caso, la funzione è nulla in un intervallo del tipo $[0, x_0]$, con $x_0 < 1$ (non può infatti valere $x_0 = 1$, per ovvi motivi). Supponiamo che, immediatamente a destra di x_0, la funzione sia positiva (tradotto: $\alpha' > 0$, il coefficiente angolare a destra di x_0. Se $\alpha' < 0$ la discussione è analoga).

Esiste allora $\delta_0 > x_0$ tale che la funzione abbia derivata costante in $[x_0, \delta_0]$, ed esiste n_0 tale che per $n \geq n_0$ valga $\alpha'\delta_0 \geq \frac{2016}{\sqrt{n}}$: per tali indici, sia δ_n tale che $u(\delta_n) = \frac{2016}{\sqrt{n}}$.

Basta allora definire l'approssimante v_{n_0} ponendo $v_{n_0} \equiv u$ a destra di δ_{n_0}, e raccordando in maniera lineare i punti seguenti:

$$\left(0, \frac{2016}{\sqrt{n}}\right) \ , \ \left(\frac{\delta_{n_0} - x_0}{4}, 0\right) \ , \ (\gamma_{n_0}, 0) \ , \ \left(\delta_{n_0}, \frac{2016}{\sqrt{n}}\right)$$

Si dimostra infatti, in maniera analoga a prima, che esiste $\gamma_{n_0} \in]x_0, \delta_{n_0}[$ che rende vera l'uguaglianza integrale.

A questo punto si possono fare le stesse considerazioni di prima, e concludere.