

# Scritto d'esame di Elementi di Calcolo delle Variazioni

Pisa, 23 Febbraio 2016

1. Studiare il problema di minimo

$$\min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^2 - 7\dot{u} + x^3 u) dx : u(0) = 0 \right\}.$$

2. Discutere esistenza, unicità e regolarità per il problema

$$\ddot{u} = \frac{u^3}{\cos x}, \quad u(0) = u(1) = 2016.$$

3. Consideriamo, per ogni numero reale  $\ell > 0$ , il problema di minimo

$$\min \left\{ \int_0^\ell (\dot{u}^2 - \sin^2 u) dx : u(0) = u(\ell) = 0 \right\}.$$

- (a) Determinare per quali valori di  $\ell$  il problema di minimo ha soluzione.  
(b) Determinare per quali valori di  $\ell$  il valore del minimo (esiste ed) è negativo.  
(c) Stabilire se esistono valori di  $\ell$  per cui il valore del minimo è esattamente  $-2016$ .
4. (a) Dimostrare che per ogni intero positivo  $n$  esiste

$$M_n = \min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^2 + u \sin u) dx : u(0) = 2016, \int_0^1 u^2 dx = n \right\}.$$

- (b) Calcolare il limite di  $M_n$  per  $n \rightarrow +\infty$ .  
(c) Calcolare, al variare del parametro  $a$ , il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M_n}{n^a}.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.  
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.