

Scritto d'esame di Elementi di Calcolo delle Variazioni

Pisa, 2 Febbraio 2016

1. Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_0^2 [\dot{u}^2 + (u - x^2)^2] dx.$$

- (a) Studiare il problema di minimo per $F(u)$ con le condizioni al bordo $u(0) = u(2)$.
(b) Studiare il problema di minimo per $F(u)$ con le condizioni al bordo $u'(0) = u'(2)$.

2. Discutere esistenza, unicità e regolarità per il problema

$$\ddot{u} = 2^{x+u}, \quad u(2) = 2, \quad u(4) = 4.$$

3. Consideriamo, per ogni numero reale $\ell > 0$, il funzionale

$$F(u) = \int_0^\ell [\dot{u}^2 - \sinh(u^2)] dx.$$

Stabilire per quali valori di ℓ valgono le seguenti proprietà.

- (a) La funzione $u_0(x) \equiv 0$ è un minimo locale forte (SLM), ovviamente tra quelle che hanno lo stesso dato al bordo.
(b) Esiste il minimo di $F(u)$ con le condizioni al bordo $u(0) = u(\ell) = 0$.
(c) Esiste il minimo di $F(u)$ con le condizioni al bordo $u(0) = u(\ell) = 2016$.
4. (a) Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste

$$m_\varepsilon = \min \left\{ \int_0^1 [\sinh(\dot{u}^2) + \sin^4 u] dx : u(0) = 0, u(1) = \varepsilon \right\}.$$

- (b) Determinare la parte principale di m_ε per $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.