Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Elementi di Calcolo delle Variazioni

Pisa, 25 Dicembre 2015

Esercizio 1. Consideriamo il problema seguente:

$$\min\left\{ \int_0^1 (\ddot{u}^2 + u^2 - x^2 u)\ dx \ \middle|\ u(0) = 0 \right\}$$

- Scrivere l'equazione di Eulero, e le condizioni al bordo associate al problema.
- Dimostrare che l'equazione di Eulero ha soluzione unica.
- Stabilire se il problema di minimo ha soluzione.

Soluzione. Supponiamo che $u \in C^2([0,1])$ sia un punto di minimo per il funzionale:

$$F(u) = \int_0^1 (\ddot{u}^2 + u^2 - x^2 u)\ dx$$

nello spazio:

$$X = \{u \in C^2([0,1]) \mid u(0) = 0\}$$

Allora, presa $v \in V$, con:

$$V = \{v \in C^2([0,1]) \mid v(0) = 0\}$$

si ha la prima forma integrale di Eulero:

$$\int_0^1 (2u - x^2)v + 2u''v''\ dx = 0$$

Supponendo che sia $u \in C^4([0,1])$, si ha allora, integrando due volte per parti:

$$[u''v']_0^1 - [u'''v]_0^1 + \int_0^1 (2u'''' + 2u - x^2)v\ dx = 0$$

$$u''(1)v'(1) - u''(0)v'(0) - u'''(1)v(1) + \int_0^1 (2u'''' + 2u - x^2)v\ dx = 0$$

Restringendosi allora al seguente sottospazio di V:

$$V' = \{v \in C^2([0,1]) \mid v(0) = 0, v(1) = 0, v'(0) = 0, v'(1) = 0\}$$

si dimostra allora che u dev'essere una soluzione dell'equazione di Eulero:

$$u'''' = \frac{1}{2}x^2 - u$$

Tornando poi indietro, e sfruttando l'arbitrarietà di $v \in V$, si ha che u deve soddisfare le seguenti condizioni al bordo:

$$u(0) = u''(0) = u''(1) = u'''(1) = 0$$

Procedere con metodi indiretti, però, d'ora in poi diventa notevolmente faticoso. Conviene piuttosto usare i metodi diretti. Formuliamo allora il problema nello spazio seguente:

$$X = \{u \in H^2([0,1]) \mid u(0) = 0\}$$

Supponiamo ora che sia $F(u) \leq M$. Allora:

$$M \ \geq \int_0^1 (\ddot{u}^2 + u^2 - x^2 u)\ dx \ = \int_0^1 \left(\ddot{u}^2 + u^2 - x^2 u + \frac{x^4}{4}\right)\ dx - \int_0^1 \frac{x^4}{4}\ dx \ =$$

$$= \int_0^1 \ddot{u}^2 + \left(u - \frac{x^2}{2}\right)^2 \, dx - \frac{1}{20} \;\geq\; \int_0^1 \ddot{u}^2 - \frac{1}{20} \;,$$

da cui:

$$||\ddot{u}||_{L^2}^2 \;\leq\; M + \frac{1}{20} = \mu_1^2$$

$$||\ddot{u}||_{L^2} \;\leq\; \mu_1$$

Abbiamo dunque ottenuto una limitazione sulla derivata seconda. Analogamente:

$$M \;\geq\; \int_0^1 (\ddot{u}^2 + u^2 - x^2 u) \, dx \;=\; \int_0^1 \left(\ddot{u}^2 + u^2 - x^2 u + \frac{x^4}{4}\right) \, dx - \int_0^1 \frac{x^4}{4} \, dx \;=$$

$$= \int_0^1 \ddot{u}^2 + \left(u - \frac{x^2}{2}\right)^2 \, dx - \frac{1}{20} \;\geq\; \int_0^1 \left(u - \frac{x^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{20} \;,$$

da cui:

$$\left|\left|u - \frac{x^2}{2}\right|\right|_{L^2} \;\leq\; \mu_1 \;\Rightarrow\; ||u||_{L^2} \;\leq \mu_1 + \left|\left|\frac{x^2}{2}\right|\right|_{L^2} = \mu_2$$

Abbiamo dunque ottenuto una limitazione anche sulla funzione.

Ciò è sufficiente per limitare uniformemente la derivata prima. Infatti, per ogni t in $[0,1]$:

$$|u'(t) - u'(0)| \;\leq\; \int_t^1 |u''(s)| ds \;\leq\; \sqrt{t}\, ||u''||_{L^2} \;\leq\; \mu_1 \;,$$

da cui per ogni $t \in [0,1]$ si ha $u'(t) \in [u'(0) - \mu_1, u'(0) + \mu_1]$. Basterebbe allora dimostrare che $|u'(0)| \leq H$, con H costante opportuna, per concludere. In effetti, supponiamo per assurdo che sia $u'(0) \geq \mu_1 + \sqrt{3\mu_2^2 + 1}$. Allora per ogni $t \in [0,1]$ vale $u'(t) \geq \sqrt{3\mu_2^2+1}$. Quindi:

$$\mu_2^2 \;\geq\; ||u||_{L^2}^2 \;=\; \int_0^1 \left(\int_0^t u'(s) \, dx\right)^2 \, dt \;\geq\; \int_0^1 \left(\int_0^t \sqrt{3\mu_2^2 + 1} \, dx\right)^2 \, dt \;=$$

$$= \int_0^1 t^2 (3\mu_2^2 + 1) \, dt \;=\; \frac{1}{3}(3\mu_2^2 + 1) \;=\; \mu_2^2 + \frac{1}{3} \;,$$

assurdo. Il caso in cui $u'(0) \leq -\mu_1 - \sqrt{3\mu_2^2+1}$ è analogo, e non lo riportiamo.

Con passaggi abbastanza standard, che non riportiamo, si ottiene allora che i sottolivelli sono compatti per la seguente nozione di convergenza:

$$\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \to_{||\cdot||_\infty} u_\infty \\ (\dot{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \to_{||\cdot||_\infty} \dot{u}_\infty \\ (\ddot{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \rightharpoonup \ddot{u}_\infty \end{cases}$$

Tale nozione di convergenza rende semicontinuo il funzionale, perciò resta solo da mostrare che la soluzione è regolare. In effetti, tornando indietro alla prima forma integrale di Eulero (certamente valida per ogni $v \in C_c^\infty(]0,1[)$), si ha che u ammette derivata debole quarta continua, dunque $u \in C^4([0,1])$ (in realtà $u \in C^\infty([0,1])$). A questo punto, per quanto detto precedentemente, u soddisfa le quattro condizioni al bordo esposte prima.

Il problema di minimo ha dunque soluzione. Resta da far vedere che essa è unica. Se $w \in X$, dunque $w = u + v$ per qualche $v \in V$, si ha:

$$F(w) = \int_0^1 \ddot{u}^2 + \ddot{v}^2 + 2\ddot{u}\ddot{v} + u^2 + v^2 + 2uv - x^2 u - x^2 v \; dx =$$

$$= F(u) + \int_1^0 \ddot{v}^2 + v^2 \; dx + \int_0^1 (2u - x^2)v + 2\ddot{u}\ddot{v} \; dx = F(u) + \int_1^0 \ddot{v}^2 + v^2 \; dx \geq F(u) \;,$$

e l'uguaglianza si ha solo se $||\ddot{v}||_{L^2}$ (ossia $\dot{v}$ è costante, quindi $v = ax + b$, con $b = 0$ perchè $v(0) = 0$) e $||v||_{L^2} = 0$, da cui $v \equiv 0$.

Esercizio 2. Discutere esistenza, unicità e regolarità per il problema:

$$\begin{cases} \ddot{u} = \frac{xu^3}{1+\dot{u}^2} \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 2016 \end{cases}$$

Soluzione. Innanzitutto l'equazione è equivalente alla seguente:

$$(1 + \dot{u}^2)\ddot{u} = xu^3$$

Consideriamo quindi il funzionale seguente:

$$F(u) = \int_0^1 \psi(x, u, \dot{u})\ dx$$

con:

$$\psi(x, u, \dot{u}) = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{12}\dot{u}^4 + \frac{1}{4}xu^4$$

Un eventuale punto estremale $u \in C^2([0, 1])$ deve allora risolvere l'equazione differenziale di Eulero, che (riscritta) è proprio l'equazione di partenza:

$$\ddot{u} = \frac{xu^3}{1 + \dot{u}^2}$$

Bisogna poi chiedere che il punto estremale rispetti le condizioni al bordo.

Notiamo subito che, dato che ψ è strettamente convessa nelle variabili (s, p) per ogni $x \in [0, 1]$ fissato, tutti i punti estremali per F sono minimi, e in realtà ve n'è al più uno. Il problema di partenza, quindi, ammette al più una soluzione. Cerchiamo di minimizzare perciò il funzionale nel seguente spazio affine:

$$X' = \{u \in W^{1,4}([0, 1]) \mid u(0) = 0\ ,\ u(1) = 2016\}$$

Vediamo ora di definire una nozione di convergenza che renda i sottolivelli, ossia gli insiemi della forma:

$$\Lambda_M = \{u \in X' \mid F(u) \leq M\}$$

compatti.

Innanzitutto, se $u \in X'$, allora:

$$||\dot{u}||_{L^4}^4 \leq 12M$$

Abbiamo dunque ottenuto una limitazione sulla derivata. Sfruttando ora una delle due condizioni al bordo, ad esempio $u(0) = 0$, si può ottenere una limitazione in norma uniforme sulla funzione. Infatti, per ogni $x, y \in [0, 1]$:

$$|u(x) - u(y)|\ \leq\ \int_y^x |\dot{u}(s)|\ ds\ \leq \leq\ ||\dot{u}||_{L^4}|x - y|^{3/4}$$

da cui $u \in C^{0,3/4}([0, 1])$. In particolare, abbiamo:

$$||u||_\infty\ \leq\ K_M$$

Prima di andare avanti, notiamo che il funzionale F è positivo, nel senso che per ogni $u \in X'$ vale $F(u) \geq 0$. Inoltre se $u_0 \equiv 2016x$, allora $F(u_0) < +\infty$. Dunque esiste:

$$\inf_{u \in X'} F(u) \in [0, +\infty[$$

In particolare, esistono sottolivelli Λ_M non vuoti.

Sia dunque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \subseteq \Lambda_M$: allora, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, vale $||\dot{u}_n||_{L^4} \leq K_M$. Dato che le palle in $W^{1,4}([0, 1])$ sono debolmente compatte, esiste allora una sottosuccessione $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^+}$ tale che:

$$(\dot{u}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^+} \rightharpoonup v_\infty$$

Considerando allora la successione $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^+}$, i conti fatti precedentemente mostrano che essa è:

- Equilimitata, dato che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ vale $||u_{n_k}||_\infty \ \leq \ K_M$;

- Equicontinua, dato che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x, y \in [0,1]$ vale:

$$|u_{n_k}(y) - u_{n_k}(x)| \leq K_M \ |x-y|^{3/4}$$

Usando il teorema di Ascoli-Arzelà, allora, esiste una sottosuccessione $(u_{n_{k_h}})_{h\in\mathbb{N}^+}$ tale che:

$$\begin{cases} (u_{n_{k_h}})_{h\in\mathbb{N}^+} \to_{||\cdot||_\infty} u_\infty \\ (\dot{u}_{n_{k_h}})_{h\in\mathbb{N}^+} \rightharpoonup v_\infty \end{cases}$$

In particolare, si dimostra facilmente che $v_\infty = \dot{u}_\infty$ (derivata intesa in senso debole). La nozione di convergenza che scegliamo, pertanto, è questa:

$$\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \to_{||\cdot||_\infty} u_\infty \\ (\dot{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \rightharpoonup \dot{u}_\infty \end{cases}$$

Notiamo che la convergenza uniforme delle funzioni assicura che effettivamente sia $u_\infty \in X'$.

Passiamo ora alla semicontinuità. Il conto è standard, già visto a lezione, perciò non ne diamo i dettagli: l'addendo che coinvolge le derivate è inferiormente semicontinuo, mentre l'addendo che coinvolge le funzioni è continuo (la convergenza uniforme assicura il passaggio al limite sotto il segno di integrale).

Abbiamo quindi dimostrato l'esistenza del minimo di F in X' (basta considerare una successione minimizzante). Data ora $v \in C_c^\infty(]0,1[)$, si ha $\phi'(0) = 0$, con:

$$\phi(t) = F(u + tv) \ ,$$

da cui:

$$\int_0^1 \dot{u}\dot{v} + \frac{1}{3}\dot{u}^3\dot{v} \ dx = -\int_0^1 xu^3 v \ dx$$

Allora $\dot{u} + \frac{1}{3}\dot{u}^3$ ammette derivata debole continua, pertanto tale funzione appartiene a $C^1([0,1])$. Ma:

$$\dot{u} + \frac{1}{3}\dot{u}^3 \ = \ h \circ \dot{u}$$

con $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $h(x) = x + \frac{1}{3}x^3$. Tale funzione è liscia, e in più è tale che $h'(x) \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque è globalmente invertibile, con inversa addirittura liscia.

Dunque $\dot{u} \in C^1([0,1])$, quindi $u \in C^2([0,1])$. A questo punto, usando in maniera standard la tecnica di *bootstrap*, si dimostra che in realtà $u \in C^\infty([0,1])$.

Concludiamo quindi che la soluzione del problema assegnato esiste ed è unica, ed appartiene a $C^\infty([0,1])$.

Esercizio 3. Consideriamo, per ogni numero reale $l > 0$, il problema seguente:

$$\min \left\{ \ F(u) = \int_0^l \dot{u}^2 - u^2 + 7xu \ dx \ \middle| \ u(0) = 0 \ , \ u(l) = 2016 \right\}$$

- Scrivere l'equazione di Eulero associata al problema.

- Studiare, al variare del parametro l, l'unicità della soluzione dell'equazione di Eulero.

- Stabilire per quali valori di l il problema di minimo ha soluzione.

Soluzione. L'equazione di Eulero associata al problema, che peraltro è un'equazione lineare del secondo ordine, è la seguente:

$$2\ddot{u} = -2u + 7x$$

$$\ddot{u} = -u + \frac{7}{2}\,x$$

A questa bisogna aggiungere le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(l) = 2016 \end{cases}$$

La soluzione è allora del tipo:

$$u(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) + \frac{7}{2}\,x$$

Dato che $u(0) = 0$, necessariamente $c_2 = 0$. Dunque:

$$u(x) = \gamma \sin(x) + \frac{7}{2}\,x$$

Dobbiamo ora imporre:

$$2016 = \gamma \sin(l) + \frac{7}{2}\,l$$

$$\gamma \sin(l) = 2016 - \frac{7}{2}\,l$$

Se allora $l \neq k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, la soluzione è univocamente determinata:

$$\gamma = \frac{2016 - \frac{7}{2}\,l}{\sin(l)}$$

Se invece $l = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{N}^+$, allora il primo membro è nullo, mentre il secondo membro non lo è, in quanto esso si annulla per:

$$\tilde{l} = 576$$

Dunque la soluzione dell'equazione di Eulero:

- Non esiste per ogni l della forma $k\pi$, con k naturale positivo;
- Esiste ed è unica per ogni altro l che sia strettamente positivo.

Per concludere, per ogni l tale che la soluzione dell'equazione di Eulero esista, la variazione seconda calcolata in tale soluzione è:

$$Q(v) = \int_0^l \dot{v}^2 - v^2 \; dx \;,$$

la quale soddisfa banalmente la condizione L^+. L'equazione di Jacobi associata è:

$$\ddot{v} = -v \;,$$

e la soluzione di tale equazione, con dati al bordo $v(0) = 0, \dot{v}(0) = 1$ è:

$$v(x) = \sin(x)$$

Essa si annulla nuovamente in $x_0 = \pi$. Concludiamo allora che:

- Per $0 < l < \pi$ il problema di minimo ha soluzione;
- Per $l \geq \pi$, o perchè non esistono soluzioni dell'equazione di Eulero, o perchè tale soluzione non è nemmeno un minimo direzionale, ma solamente un punto stazionario, il problema di minimo non ha soluzione.

Esercizio 4. Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo:

$$I_\varepsilon = \inf \left\{ \int_0^1 (\varepsilon \dot{u}^4 - \dot{u}^2 - u^2)\ dx \;\middle|\; u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

- Dimostrare che $I_\varepsilon \in]-\infty, 0[$ per ogni $\varepsilon > 0$.
- Dimostrare che $I_\varepsilon \to -\infty$ per $\varepsilon \to 0^+$.
- Calcolare l'ordine di infinito di I_ε per $\varepsilon \to 0^+$.

Soluzione. Per il primo punto, basta notare che, se $|\dot{u}(x)| \leq \varepsilon^{-1/2}$, allora:

$$\varepsilon \dot{u}^4(x) - \dot{u}^2(x) \leq 0$$

Considerata allora la parabola concava seguente:

$$u_\varepsilon(x) \overset{\textbf{def}}{=} bx^2 - bx\ ,$$

con $b = \varepsilon^{1/2}$, allora si ha:

$$F_\varepsilon(u) \ \overset{\textbf{def}}{=} \ \int_0^1 (\varepsilon \dot{u_\varepsilon}^4 - \dot{u_\varepsilon}^2 - u_\varepsilon^2)\ dx \ \leq \ \int_0^1 -u_\varepsilon^2\ dx \ < \ 0\ ,$$

visto che u_ε non è identicamente nulla.

È ora facile dimostrare che per $u \in C^1([0,1])$, con $u(0) = 0$, vale:

$$\int_0^1 u^2\ dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{u}^2\ dx$$

Dunque, per ogni $u \in C^1([0,1])$ nulla al bordo:

$$F_\varepsilon(u) \geq \int_0^1 \varepsilon \dot{u}^4 - \frac{3}{2}\dot{u}^2\ dx \geq \int_{A_\varepsilon} \varepsilon \dot{u}^4 - \frac{3}{2}\dot{u}^2\ dx\ ,$$

dove A_ε è l'insieme dove l'integrando è minore o uguale a 0. Perchè sia $x \in A_\varepsilon$, dev'essere:

$$|\dot{u}(x)| \leq \sqrt{\frac{3}{2\varepsilon}}\ ,$$

da cui:

$$\int_{A_\varepsilon} \varepsilon \dot{u}^4 - \frac{3}{2}\dot{u}^2\ dx \ \geq \ \int_{A_\varepsilon} -\frac{3}{2}\,\frac{3}{2\varepsilon}\ dx \ = \ -m(A_\varepsilon)\,\frac{3}{2}\,\frac{3}{2\varepsilon} \ \geq \ \frac{3}{2}\,\frac{3}{2\varepsilon}\ ,$$

da cui $I_\varepsilon \in\ ]-\infty, 0\ [$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Operiamo ora una linearizzazione. Poniamo dunque:

$$u = \varepsilon^\alpha v$$

In particolare, selezionando α in modo tale che $1 + 4\alpha = 2\alpha$ (ossia $\alpha = 1/2$), si ha:

$$I_\varepsilon = \inf \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \dot{v}^4 - \dot{v}^2 - v^2\ dx \;\middle|\; v(0) = v(1) = 0 \right\}$$

$$I_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \inf \left\{ \int_0^1 \dot{v}^4 - \dot{v}^2 - v^2\ dx \;\middle|\; v(0) = v(1) = 0 \right\} = \frac{1}{\varepsilon} I_1$$

Per quanto precedentemente dimostrato, I_1 è un valore reale è strettamente negativo. Quindi:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} I_1 = -\infty\ ,$$

e inoltre:

$$I_\varepsilon = \mathrm{O}(\varepsilon^{-1})\ ,\ \varepsilon \to 0^+$$