Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Elementi di Calcolo delle Variazioni

Pisa, 12 Gennaio 2016

Esercizio 1. Studiare il problema di minimo:

$$\min\left\{ \int_0^1 (\dot{u}^2 + u^2 - x^2 u)\, dx \;\middle|\; u(0) = 0 \right\}$$

Soluzione. Proviamo minimizzare il seguente funzionale:

$$F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + u^2 - x^2 u)\, dx$$

nello spazio seguente:

$$X = \{u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = 0\}$$

Il minimo, se esiste in X, deve soddisfare:

$$\left.\frac{d}{dt} F(u + tv)\right|_{t=0} = 0$$

per ogni $v \in V$, con V giacitura di X (X è uno spazio vettoriale, quindi in questo caso $V = X$). Da qui si ottiene, in sostanza, la prima forma integrale di Eulero:

$$\int_0^1 2\dot{u}\dot{v} + 2uv - x^2 v\, dx = 0$$

Supponendo che sia $u \in C^2([0,1])$, integrando per parti si ottiene la seconda forma integrale di Eulero:

$$[2\dot{u}v]_0^1 + \int_0^1 -2\ddot{u}v + 2uv - x^2 v\, dx = 0$$

$$2\dot{u}(1)v(1) + \int_0^1 (-2\ddot{u} + 2u - x^2)v\, dx = 0$$

Restringendosi allora al sottospazio W di V seguente:

$$W = \{v \in C^1([0,1]) \mid v(0) = v(1) = 0\}$$

si ha che u, se esiste, dev'essere soluzione della seguente equazione differenziale di Eulero:

$$-2\ddot{u} + 2u - x^2 = 0$$

$$-2\ddot{u} + 2u = x^2$$

Proviamo a determinare una soluzione particolare dell'equazione, della forma:

$$u_0(x) = ax^2 + b$$

In effetti, se $a = b = 1/2$, u_0 risolve l'equazione differenziale. A tale funzione possiamo sommare una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea associata:

$$-2\ddot{z} + 2z = 0$$

$$\ddot{z} = z$$

Vale allora:

$$z(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x}$$

Supponiamo di poter imporre la condizione di Dirichlet $u(0) = 0$, ove $u = z + u_0$ (ossia $z(0) = -u_0(0) = -\frac{1}{2}$). La seconda forma integrale diventa allora:

$$2\dot{u}(1)v(1) + \int_0^1 (-2\ddot{u} + 2u - x^2)v \; dx = 2\dot{u}(1)v(1) = 0$$

Per arbitrarietà di $v \in V$, allora (dato che esistono $v \in V \setminus W$ con $v(1) \neq 0$), bisogna imporre la seguente condizione di Neumann su u:

$$\dot{u}(1) = 0 \; ,$$

ossia $\dot{z}(1) = -\dot{u_0}(1) = -1$.

Ci siamo quindi ricondotti al seguente problema misto:

$$\begin{cases} \ddot{z} = z \\ z(0) = -\frac{1}{2} \\ \dot{z}(1) = -1 \end{cases}$$

il quale è risolubile (e la soluzione è unica) in quanto lo è il seguente sistema lineare, perchè la matrice (di Vandermonde) ha determinante non nullo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e} & -\mathrm{e}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Omettiamo il calcolo esplicito dei coefficienti c_1, c_2.

Sia quindi $u = z + u_0$ la soluzione trovata. Data allora $w \in X$, se $v = w - u \in V$ si ha:

$$\begin{aligned} F(w) \; = \; F(u+v) \; &= \int_0^1 (\dot{u}^2 + u^2 - x^2 u) \; dx + \\ \int_0^1 (\dot{v}^2 + v^2 - x^2 v) \; dx &+ \int_0^1 (2\dot{u}\dot{v} + 2uv) \; dx \; = \\ &= \; F(u) + ||v||^2_{H^1([0,1])} \; \geq \; F(u) \; , \end{aligned}$$

da cui si ha che u è minimo globale. Il minimo è inoltre unico, perchè se $||v||^2_{H^1([0,1])} = 0$ allora $v \equiv 0$ quasi ovunque, in realtà ovunque perchè v è continua (l'unicità si poteva anche dimostrare usando le proprietà di stretta convessità nelle variabili (s,p), per ogni $x \in [0,1]$ fissato, della funzione integranda $\psi(x,s,p) = p^2 + s^2 - x^2 s$).

Il minimo, dunque, è $F(u)$ (omettiamo i conti).

Esercizio 2. Discutere esistenza, unicità e regolarità per il problema:

$$\begin{cases} \ddot{u} = \frac{u^5}{1+x^3} + x^5 \\ u(0) = 2016 \\ u'(2016) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Consideriamo il funzionale seguente:

$$F(u) = \int_0^{2016} \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \left(\frac{1}{6}\frac{u^6}{1+x^3} + x^5 u \right) \; dx$$

un eventuale punto di minimo $u \in C^2([0, 2016])$ deve allora risolvere l'equazione differenziale di Eulero, che è proprio l'equazione di partenza:

$$\ddot{u} = \frac{u^5}{1+x^3} + x^5$$

Bisogna poi chiedere che il punto di minimo rispetti le condizioni al bordo.

Il metodo indiretto è però poco funzionale, in questo caso, perciò usiamo il metodo diretto. Cerchiamo di minimizzare perciò il funzionale nel seguente spazio affine:

$$X' = \{u \in H^1([0,2016]) \mid u(0) = 2016\}$$

La condizione al bordo di Dirichlet, come sappiamo, ha senso.

Vediamo ora di definire una nozione di convergenza che renda i sottolivelli, ossia gli insiemi della forma:

$$\Lambda_M = \{u \in X' \mid F(u) \leq M\}$$

compatti.

Innanzitutto, se $u \in X'$, allora:

$$\int_0^{2016} \frac{1}{6}\frac{u^6}{1+x^3} + x^5 u \; dx \;\; \geq \;\; -\int_0^{2016} x^5|u| \; dx \;\; \geq \;\; -2016^5 \int_0^{2016} |u| \; dx$$

Inoltre, per ogni $x \in [0,2016]$ e per ogni $u \in X'$:

$$|u(x)| \;\; \leq \;\; |u(0)| + \sqrt{x}\; ||\dot{u}||_{L^2} \;\; \leq \;\; 2016 + \sqrt{2016}\; ||\dot{u}||_{L^2}$$

Dunque, per la disuguaglianza appena vista, integrando si ha:

$$\int_0^{2016} |u| \; dx \;\; \leq \;\; 2016^2 + 2016^{3/2}||\dot{u}||_{L_2}$$

Se dunque $u \in \Lambda_M$, allora $F(u) \leq M$, da cui:

$$M \;\; \geq \frac{1}{2}||\dot{u}||^2_{L^2} - \int_0^{2016} x^5|u| \; dx$$

da cui:

$$||\dot{u}||^2_{L^2} \leq 2M + 2\int_0^{2016} x^5|u| \; dx \;\; \leq \;\; 2M + 2 \cdot 2016^5 \left[2016^2 + 2016^{3/2}||\dot{u}||_{L_2}\right]$$

Se ora $\sigma = ||\dot{u}||_{L^2}$, allora il primo membro cresce quadraticamente in σ, mentre il secondo membro ha una crescita lineare in σ, anzi affine. In ogni caso, deduciamo che σ dev'essere limitato, dunque esiste una costante K_M tale che:

$$u \in \Lambda_M \;\; \Rightarrow \;\; ||\dot{u}||_{L^2} \leq K_M$$

Abbiamo dunque ottenuto una limitazione sulla derivata. Sfruttando ora la condizione al bordo, si può ottenere una limitazione in norma uniforme sulla funzione. Infatti, per ogni $x \in [0,2016]$:

$$|u(x) - u(0)| \;\; = \;\; \left|\int_0^x \dot{u}(s) \; ds\right| \;\; \leq \;\; \int_0^x |\dot{u}(s)| \; ds \;\; =$$

$$= \int_0^{2016} |\dot{u}(s)| \cdot \mathbb{I}_{[0,x](s)} \; ds \;\; \leq \;\; \left(\int_0^{2016} |\dot{u}(s)|^2 \; ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2016} \mathbb{I}_{[0,x](s)} \; ds\right)^{\frac{1}{2}} \;\; \leq \;\; ||\dot{u}||_{L^2}\sqrt{x}$$

In particolare, abbiamo:

$$||u||_\infty \;\; \leq \;\; 2016 + K_M \cdot \sqrt{2016}$$

Sia dunque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \subseteq \Lambda_M$: allora, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, vale $||\dot{u}_n||^2_{L^2} \leq K_M^2$. Dato che le palle in $H^1([0,2016])$ sono debolmente compatte, esiste allora una sottosuccessione $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^+}$ tale che:

$$(\dot{u}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^+} \rightharpoonup v_\infty$$

Considerando allora la successione $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^+}$, i conti fatti precedentemente mostrano che essa è:

- Equilimitata, dato che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ vale $||u_{n_k}||_\infty \leq 2016 + K_M \cdot \sqrt{2016}$;
- Equicontinua, dato che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x, y \in [0, 2016]$ vale:

$$|u_{n_k}(y) - u_{n_k}(x)| \leq K_M \sqrt{y-x}$$

Usando il teorema di Ascoli-Arzelà, allora, esiste una sottosuccessione $(u_{n_{k_h}})_{h\in\mathbb{N}^+}$ tale che:

$$\begin{cases} (u_{n_{k_h}})_{h\in\mathbb{N}^+} \to_{||\cdot||_\infty} u_\infty \\ (\dot{u}_{n_{k_h}})_{h\in\mathbb{N}^+} \rightharpoonup v_\infty \end{cases}$$

In particolare, si dimostra facilmente che $v_\infty = \dot{u}_\infty$ (derivata intesa in senso debole). La nozione di convergenza che scegliamo, pertanto, è questa:

$$\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \to_{||\cdot||_\infty} u_\infty \\ (\dot{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \rightharpoonup \dot{u}_\infty \end{cases}$$

Notiamo che la convergenza uniforme delle funzioni assicura che effettivamente sia $u_\infty \in X'$.

Passiamo ora alla semicontinuità. Il conto è standard, già visto a lezione, perciò non ne diamo i dettagli: l'addendo che coinvolge le derivate è inferiormente semicontinuo, mentre l'addendo che coinvolge le funzioni è continuo (la convergenza uniforme assicura il passaggio al limite sotto il segno di integrale).

Abbiamo quindi dimostrato l'esistenza del minimo di F in X' (basta considerare una successione minimizzante). Data ora $v \in C_c^\infty(]0, 2016[)$, si ha $\phi'(0) = 0$, con:

$$\phi(t) = F(u + tv) \ ,$$

da cui:

$$\int_0^{2016} \dot{u}\dot{v} \ dx = -\int_0^{2016} \left(\frac{u^5}{1+x^3} + x^5 \right) v \ dx$$

Allora $\dot{u}$ ammette derivata debole, e si ha:

$$\ddot{u} = \frac{u^5}{1+x^3} + x^5$$

Dunque $\dot{u} \in C^1([0, 2016])$, quindi $u \in C^2([0, 2016])$. A questo punto, usando in maniera standard la tecnica di *bootstrap*, si dimostra che in realtà $u \in C^\infty([0, 2016])$.

Prima di discutere l'unicità della soluzione, dimostriamo che vale:

$$\dot{u}(2016) = 0$$

Dato che $u \in C^2([0, 2016])$ con $u(0) = 2016$, essa deve risolvere, per ogni $v \in V$ con:

$$V = \{v \in C^1([0, 2016]) \mid v(0) = 0\}$$

la prima forma integrale di Eulero:

$$\int_0^{2016} \dot{u}\dot{v} + \left(\frac{u^5}{1+x^3} + x^5 \right) v \ dx = 0$$

Integrando per parti, si ottiene:

$$[\dot{u}v]_0^{2016} + \int_0^{2016} \left(-\ddot{u} + \frac{u^5}{1+x^3} + x^5 \right) v \ dx \ = \dot{u}(2016)v(2016) \ = \ 0 \ ,$$

e per l'arbitrarietà di v si ha che il minimo u è tale che $\dot{u}(2016) = 0$.

Infine, la stretta convessità della funzione integranda:

$$\psi(x,s,p) = \frac{1}{2}p^2 + \left(\frac{1}{6}\frac{s^6}{1+x^3} + x^5 s\right)$$

nelle variabili (s,p), per ogni $x \in [0,2016]$ fissato, assicura che vi sia un unico punto stazionario per F, e che esso sia minimo.

Concludiamo quindi che la soluzione del problema assegnato esiste ed è unica, ed appartiene a $C^\infty([0,2016])$.

Esercizio 3. Consideriamo, per ogni numero reale $l > 0$, il problema:

$$\min \left\{ F(u) = \int_0^l \dot{u}^2 - 7\arctan^2(u)\ dx \;\middle|\; u(0) = u(l) = 0 \right\}$$

- Stabilire per quali valori di l il problema ha soluzione.
- Stabilire per quali valori di l il minimo (esiste ed) è negativo.

Soluzione. Il problema ha soluzione per ogni $l > 0$, e ciò è diretta conseguenza dell'applicazione del metodo diretto. La limitazione sulla derivata si ottiene notando che la funzione arcotangente è limitata, dopodichè la compattezza si ottiene usando una delle due condizioni al bordo. La semicontinuità è ovvia, e la regolarità si ottiene anch'essa in modo standard. Il minimo, dunque, esiste per ogni $l > 0$. In particolare, per ogni l tale minimo è compreso tra $-7l\frac{\pi^2}{4}$ e 0.

Per il secondo punto, innanzitutto ricordiamo brevemente i primi termini dello sviluppo in serie di Taylor dell'arcotangente:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \mathrm{O}(x^5)\ ,\ x \to 0$$

Da qui si ha:

$$\arctan^2(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^5)\ ,\ x \to 0$$

Vale poi, per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan^2(x) \leq x^2$$

Fatte queste premesse, si ha allora, per ogni $u \in C^1([0,1])$ nulla al bordo:

$$F(u) \geq G(u) = \int_0^l \dot{u}^2 - 7u^2\ dx$$

Studiamo allora $G(u)$: essa è una forma quadratica, che peraltro soddisfa la condizione L^+. L'equazione di Jacobi associata è:

$$\ddot{u} = -7u$$

La soluzione di tale equazione, con i dati iniziali $u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1$ è:

$$u_0(x) = \alpha \sin\left(\sqrt{7}x\right)\ ,$$

la quale si annulla nuovamente in $x_0 = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$. Per linearità, allora:

- Per $l > x_0$, $\inf G(u) = -\infty$;
- Per $l \leq x_0$, $\inf G(u) = \min G(u) = 0$ (il caso $l = x_0$ si discute in maniera standard, usando la linearità).

Dunque, per $l \leq x_0$, $\min F(u) = 0$, dato che $\inf F(u) \geq \inf G(u) = 0$, e $F(\phi_0) = 0$, ove ϕ_0 è la funzione identicamente nulla.

Resta da studiare il caso $l > x_0$, ossia $l = x_0 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$. In tal caso, per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, per ogni $x \in [-\delta, \delta]$ vale, in virtù dell'approssimazione vista prima:

$$\arctan^2(x) \geq \alpha_\varepsilon x^2$$

con:

$$\alpha_\varepsilon = \left(\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sqrt{7}}{\pi}} \right)^2 < 1$$

Dunque, se ad esempio $v \in C_c^\infty(]0, l[)$ è tale che $||v||_{C^0} \leq \delta$ e $||\dot{v}||_{C^0} \leq \delta$, allora:

$$F(u) \leq H_\varepsilon(u) = \int_0^{x_0+\varepsilon} \dot{v}^2 - 7\alpha_\varepsilon v^2 \, dx$$

L'equazione di Jacobi per $H_\varepsilon(u)$ è:

$$\ddot{u} = -7\alpha_\varepsilon u$$

la cui soluzione con dati al bordo $u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1$ è:

$$u_\varepsilon(x) = \beta_\varepsilon \sin\left(\sqrt{7\alpha_\varepsilon} x\right),$$

che si annulla nuovamente in:

$$x_\varepsilon = \frac{\pi}{\sqrt{7\alpha_\varepsilon}} = x_0 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Dunque la funzione nulla non è minimo direzionale, ergo esiste $v \in C_c^\infty(]0, x_0 + \varepsilon[)$ tale che $||v||_{C^0} \leq \delta$, $||\dot{v}||_{C^0} \leq \delta$ e $H_\varepsilon(v) < 0$. Pertanto, per tale v, vale:

$$F(v) \leq H_\varepsilon(v) < 0 \ ,$$

da cui per $l > x_0$ il minimo esiste ed è strettamente negativo, e comunque non minore di $-7l\frac{\pi^2}{4}$.

Esercizio 4. Determinare per quali valori del parametro reale λ il problema seguente:

$$\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^4 - 2\dot{u}^2 \, dx \;\middle|\; u(0) = 0, u(1) = \lambda \right\}$$

ammette soluzione.

Determinare per quali valori reali di λ la funzione $u_0(x) = \lambda x$ è un punto di minimo locale debole per il problema precedente.

Calcolare infine:

$$\min \left\{ \int_0^3 \dot{u}^4 - 2\dot{u}^2 + (u - \mathrm{e}^x)^2 \, dx \;\middle|\; u \in C^1([0,3]) \right\}$$

Soluzione. Prima di cominciare, esponiamo brevemente alcune caratteristiche che ci serviranno nel seguito della funzione $\phi(x) = x^4 - 2x^2$:

- Essa si annulla in 0, $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$, e i suoi minimi sono -1 e 1, ove vale -1;
- La sua derivata seconda è $\phi''(x) = 12x^2 - 4$, dunque i punti di flesso sono $1/\sqrt{3}$ e $-1/\sqrt{3}$. La funzione è dunque strettamente concava in $]-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}[$ e strettamente convessa in $]-\infty, -1/\sqrt{3}[\cup]1/\sqrt{3}, +\infty[$;
- La funzione convessificata $\phi^{**}(x)$ è uguale a $\phi(x)$ in $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, e vale -1 in $[-1, 1]$.

Allora, dato che:

$$\inf \int_0^1 \phi(\dot{u})\ dx = \inf \int_0^1 \phi^{**}(\dot{u})\ dx = \phi^{**}(\lambda)\ ,$$

allora sicuramente per $|\lambda| > 1$ la retta $u_0(x) = \lambda x$ è l'unico punto di minimo globale, per stretta convessità, mentre per $|\lambda| < 1$ il funzionale non ammette minimo in $C^1([0,1])$, in quanto ogni funzione ammissibile presenta un punto $y \in]0,1[$ interno all'intervallo in cui, per il teorema di Lagrange, $\dot{u}(y) = \lambda$, da cui:

$$\int_0^1 \phi(\dot{u})\ dx > -1$$

Per $|\lambda| = 1$ la retta è l'unico punto di minimo globale, in quanto la derivata di ogni variazione ammissibile ha punti in cui essa è strettamente positiva e punti in cui essa è strettamente negativa, in quanto dev'essere $v(0) = v(1) = 0$.

Dunque il problema ha soluzione per $|\lambda| \geq 1$.

Per quanto riguarda il secondo punto, sfruttando quanto già detto precedentemente si ha che:

- Sicuramente la retta è un punto di minimo locale debole se $|\lambda| > 1/\sqrt{3}$;
- Sicuramente la retta nonè un punto di minimo locale debole (in effetti nemmeno direzionale) se $|\lambda| < 1/\sqrt{3}$.

Resta da studiare il caso in cui $|\lambda| = 1/\sqrt{3}$. In tal caso la variazione prima è:

$$\int_0^1 (4\dot{u}^3 - 4\dot{u})\dot{v}\ dx \equiv 0$$

La variazione seconda è:

$$\int_0^1 (12\dot{u}^2 - 4)\dot{v}^2\ dx \equiv 0$$

Bisogna allora considerare la variazione terza:

$$\int_0^1 24\dot{u}\dot{v}^3\ dx \not\equiv 0$$

in quanto esistono funzioni $v \in C_c^\infty(]0,1[)$ tali che:

$$\int_0^1 \dot{v}^3\ dx \neq 0\ ,$$

in quanto basta considerare un'opportuna approssimazione della funzione:

$$w(x) = \begin{cases} -(x - 1/4), & x \in [1/4, 1/2] \\ 2(x - 3/4), & x \in [3/4, 7/8] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}\ ,$$

tale che:

$$\int_0^1 \dot{w}^3\ dx = \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{8}8 = \frac{3}{4} \neq 0$$

Dunque per tali valori di λ la retta associata non è un minimo locale debole.

Per concludere, dimostriamo che:

$$\min \left\{ \int_0^3 \dot{u}^4 - 2\dot{u}^2 + (u - \mathrm{e}^x)^2\ dx \;\middle|\; u \in C^1([0,3]) \right\} = -3$$

Una disuguaglianza è ovvia. Per l'altra, possiamo notare che la funzione $\alpha(x) = \mathrm{e}^{-x}$ ha derivata compresa tra -1 e 1 (in particolare tra -1 e $-\mathrm{e}^{-3}$). Detto quindi:

$$G(u) = \int_0^3 \dot{u}^4 - 2\dot{u}^2 + (u - \mathrm{e}^{-x})^2\ dx$$

si ha $\inf G(u) = \inf \bar{G}(u)$, ove:

$$\bar{G}(u) = \int_0^3 \phi^{**}(\dot{u}) + (u - \mathrm{e}^{-x})^2 \; dx$$

A questo punto, per concludere basta notare che:

$$\bar{G}(\alpha) = \int_0^3 -1 \; dx = -3 \; ,$$

per concludere che l'estremo inferiore è proprio -3.