a) $lim_{n \to infty}(n^n)/(n!) = infty;$
b) $lim_{n \to infty}(n^n)/((2n)!) = 0;$

E ' possibile dare una dimostrazione elementare di questi due limiti?
Il primo e' evidente che va ad infinito, Comunque va sempre dimostrato in maniera rigorosa, come?

MODO 1 – CRITERIO DEL RAPPORTO

SIA $a_n > 0$ DEFINITIVAMENTE E $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$

$$\begin{cases} \ell > 1 & \Rightarrow \quad a_n \to +\infty \\ \ell < 1 & \Rightarrow \quad a_n \to 0 \\ \ell = 1 & \Rightarrow \quad ? \end{cases}$$

a) $\frac{n^n}{n!} \to +\infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+\cancel{1}}}{(\cancel{n+1})\cancel{!}} \frac{\cancel{n!}}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

b) $\frac{n^n}{(2n)!} \to 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} \frac{\cancel{(2n)!}}{n^n} \to 0$$

Volendo per la risoluzione si potrebbe usare qualcosa di diverso dal criterio del rapporto?

Uhm, temo che per i primi 2 qualunque cosa sia equivalente al criterio del rapporto, o per lo meno ad una sua dimostrazione in quel caso particolare. Detto altrimenti, uno può stimare in vari modi il fattoriale dall'alto e dal basso, ad esempio isolando una parte dei termini, ma così facendo sta sostanzialmente ri-dimostrando il criterio del rapporto.

Un paio di disuguaglianze che possono aiutare a fare i primi due limiti con soli confronti elementari sono le seguenti (si ottengono banalmente maggiorando/minorando i termini del fattoriale):

i) $n! \le n^{n-1}$

ii) $(2n)! \ge n^{n+1}$

MODO 2 – CONFRONTO

a) $\frac{n^n}{n!} \to +\infty$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \le \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{\text{"n-1" TERMINI}} = n^{n-1}$$

$$\frac{n^n}{n!} \geq \frac{n^n}{n^{n-1}} = n \to +\infty$$

b) $\dfrac{n^n}{(2n)!} \to 0$

$$(2n)! = \overbrace{2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1) \cdot n}^{\text{"}n+1\text{" TERMINI}} \cdot (n-1)! \geq n^{n+1}$$

$$\frac{n^n}{(2n)!} \leq \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n} \to 0$$

Poi ovviamente si possono fare tutti anche con Stirling, ma quello è davvero un cannone spacca-tutto!

MODO 3 – STIRLING

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \quad n \to +\infty$

a) $\dfrac{n^n}{n!} \to +\infty$

$$\frac{n^n}{n!} \sim \frac{\cancel{n^n}}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^n}{\cancel{n^n}} \to +\infty$$

b) $\dfrac{n^n}{(2n)!} \to 0$

$$\frac{n^n}{(2n)!} \sim \frac{n^n}{\sqrt{4\pi n}} \frac{e^{2n}}{(2n)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi n}} \left(\frac{\cancel{n} \cdot e^2}{4 n^{\cancel{2}}}\right)^n \to 0$$