BY GIMUSI 05/05/13

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 20 Marzo 2015

(Problemi da 3 punti)

1. Determinare una primitiva della funzione $\cos^7 x$.

2. Stabilire se l'espressione
$$\int_0^1 \frac{x+1}{x+\sqrt{x}}\,dx$$
rappresenta un numero reale, ed in caso affermativo calcolarlo esplicitamente.

3. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$u''(t) - 2u'(t) = \cos^2 t.$$

4. Le successioni a_n e b_n sono definite ponendo $a_0 = b_0 = 0$, e poi per ricorrenza
$$a_{n+1} = 3a_n + b_n + 5^n, \qquad b_{n+1} = a_n + b_n.$$
Calcolare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$.

(Problemi da 8 punti)

5. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = \frac{e^{-t}}{1-u} \qquad u(0) = \alpha.$$
   (a) Trovare la soluzione del problema nel caso $\alpha = 0$, precisando se si ha (per tempi positivi) esistenza globale, blow up o break down.
   (b) Determinare per quali valori di α si ha esistenza globale nel futuro.

6. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$
   (a) Determinare per quali valori reali di x è ben definita.
   (b) Determinare se per $x > 0$ la funzione è limitata superiormente/inferiormente e se ammette massimo/minimo (ed in caso affermativo determinare i punti di massimo/minimo).

7. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = 5x_n - x_n^2 - 4, \qquad x_0 = \alpha.$$
   (a) Nel caso $\alpha = \sqrt[3]{7}$, determinare il limite di x_n.
   (b) Determinare per quali valori di α la successione ha limite reale.
   (c) Tornando al caso $\alpha = \sqrt[3]{7}$, determinare
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log|\log|x_n||}{n}.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere adeguatamente giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla correttezza ed alla chiarezza delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Determinare una primitiva della funzione $\cos^7 x$.

$$F(x) = \int \cos^7 x \, dx = \int (\cos^2 x)^3 \cos x \, dx = \int (1-\sin^2 x)^3 \cos x \, dx =$$

PONIAMO: $\sin x = u \qquad \cos x \, dx = du$

$$= \int (1-u^2)^3 \, du = \int (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6) \, du =$$

$$= u - u^3 + \frac{3}{5}u^5 - \frac{u^7}{7} + c = \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{\sin^7 x}{7} + c$$

VERIFICA:

$$F'(x) = \cos x - 3\sin^2 x \cos x + 3\sin^4 x \cos x - \sin^6 x \cos x =$$

$$= \cos x \left(1 - 3(1-\cos^2 x) + 3(1-\cos^2 x)^2 - (1-\cos^2 x)^3\right) =$$

$$= \cos x \left(\cancel{1} - \cancel{3} + \cancel{3\cos^2 x} + \cancel{3} - \cancel{6\cos^2 x} + \cancel{3\cos^4 x} - \cancel{1} + \cancel{3\cos^2 x} - \cancel{3\cos^4 x} + \cos^6 x\right) = \cos^7 x$$

2. Stabilire se l'espressione

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x+\sqrt{x}} \, dx$$

rappresenta un numero reale, ed in caso affermativo calcolarlo esplicitamente.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x+1}{x+\sqrt{x}} = +\infty$$ SI TRATTA DI UN INTEGRALE IMPROPRIO IN 0

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x+\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{x}{x+\sqrt{x}} dx + \int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x+1}{x+\sqrt{x}} dx \in \mathbb{R}$$

PONIAMO: $y = \sqrt{x} \qquad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \qquad dx = 2y \, dy$

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x+\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{y^2+1}{y^{\cancel{2}}+\cancel{y}} \cdot 2\cancel{y} \, dy \overset{y \neq 0}{} = 2\int_0^1 \frac{y^2+1}{y+1} dy = 2\int \frac{(y+1)^2 - 2y}{y+1} dy$$

$$= 2\int_0^1 (y+1) \, dy - 4\int_0^1 \frac{y}{y+1} dy = 2\left[\frac{y^2}{2} + y\right]_0^1 - 4\int_0^1 dy + 4\int_0^1 \frac{1}{y+1} dy =$$

$$= 3 - 4 + 4\left[\log(1+y)\right]_0^1 = 4\log 2 - 1$$

3. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$u''(t) - 2u'(t) = \cos^2 t.$$

SI TRATTA DI UN'EQUAZIONE DIFF. LINEARE NON OMOGENEA A COEFF. COST.

LA SOLUZIONE GENERALE È DEL TIPO:

$$u(t) = \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{SOL. QUALUNQUE EQ. NON OMOG.}} + \overbrace{c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)}^{\text{SOL. GEN. EQ. OMOG.}}$$

<u>EQ. OMOGENEA</u> $u''(t) - 2u'(t) = 0 \rightsquigarrow x^2 - 2x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

$$u_1(t) = 1 \qquad u_2(t) = e^{2t}$$

<u>EQ. NON OMOGENEA</u> $u''(t) - 2u'(t) = \cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$

CERCHIAMO UNA SOL. DEL TIPO: $u(t) = \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t - \frac{t}{4}$

$$\begin{cases} u'(t) = -2\alpha \sin 2t + 2\beta \cos 2t - \frac{1}{4} \\ u''(t) = -4\alpha \cos 2t - 4\beta \sin 2t \end{cases}$$

$$u''(t) - 2u'(t) = -4\alpha \cos 2t - 4\beta \sin 2t + 4\alpha \sin 2t - 4\beta \cos 2t + \frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 4\alpha - 4\beta = 0 \\ -4\alpha - 4\beta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \beta \\ -8\alpha = 1/2 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -1/16 \\ \alpha = -1/16 \end{cases}$$

$$\bar{u}(t) = -\frac{1}{16}(\cos 2t + \sin 2t + 4t)$$

$$\rightsquigarrow u(t) = -\frac{1}{16}(\cos 2t + \sin 2t + 4t) + c_1 + c_2 e^{2t}$$

4. Le successioni a_n e b_n sono definite ponendo $a_0 = b_0 = 0$, e poi per ricorrenza

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n + 5^n, \qquad b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Calcolare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$.

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n + 5^n & (i) \\ b_{n+1} = a_n + b_n & (ii) \end{cases}$$

$$(i) \rightsquigarrow \begin{cases} a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1} + 5^{n+1}, \quad b_n = a_{n+1} - 3a_n - 5^n \\ b_{n+1} = a_n + b_n = \cancel{a_n} + a_{n+1} - \overset{2}{\cancel{3}}a_n - 5^n \end{cases} \rightsquigarrow (ii)$$

$$\rightsquigarrow a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_{n+1} - 2a_n - 5^n + 5^{n+1} = 4a_{n+1} - 2a_n + 4\cdot 5^n$$

PARTE OMOGENEA

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 2a_n \quad \rightsquigarrow \quad x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\rightsquigarrow c_1(2+\sqrt{2})^n + c_2(2-\sqrt{2})^n$$

SOLUZIONE SPECIALE

$$a\cdot 5^n \rightsquigarrow a\,5^{n+2} = 4\cdot a\cdot 5^{n+1} - 2\cdot a\cdot 5^n + 4\cdot 5^n$$

$$25a = 20a - 2a + 4 \qquad 7a = 4 \qquad a = \frac{4}{7}$$

SOLUZ. GEN. $\quad a_n = \frac{4}{7}5^n + c_1(2+\sqrt{2})^n + c_2(2-\sqrt{2})^n$

$$\sqrt[n]{a_n} = 5\sqrt[n]{\frac{4}{7} + c_1\frac{(2+\sqrt{2})^n}{5^n} + c_2\frac{(2-\sqrt{2})^n}{5^n}} \rightarrow 5$$

CONDIZ. INIZIALI:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{5}{7} + c_1 + c_2 = 0 \\ b_0 = a_1 - 5^0 = 0 \end{cases} \qquad a_1 = \frac{5}{7}\cdot 5 + c_1(2+\sqrt{2}) + c_2(2-\sqrt{2}) = 1$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{5}{7} \\ 2(c_1+c_2) + \sqrt{2}\,(c_1 - c_2) = -\frac{13}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = -5/7 \\ \sqrt{2}(c_1 - c_2) = -5/7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -5/7 \\ c_1 - c_2 = -\frac{5\sqrt{2}}{14} \end{cases} \qquad \begin{aligned} c_1 &= -\frac{2}{7} - \frac{5}{28}\sqrt{2} \\ c_2 &= -\frac{2}{7} + \frac{5}{28}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{5}{7}5^n - \left(\frac{2}{7} + \frac{5}{28}\sqrt{2}\right)(2+\sqrt{2})^n - \left(\frac{2}{7} - \frac{5}{28}\sqrt{2}\right)(2-\sqrt{2})^n$$

5. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{e^{-t}}{1-u} \qquad u(0) = \alpha.$$

(a) Trovare la soluzione del problema nel caso $\alpha = 0$, precisando se si ha (per tempi positivi) esistenza globale, blow up o break down.

(b) Determinare per quali valori di α si ha esistenza globale nel futuro.

(a) $u' = \dfrac{e^{-t}}{1-u} \qquad u(0)=0 \qquad u \neq 1$

$(1-u)\,du = e^{-t}\,dt \qquad u - \dfrac{u^2}{2} = -e^{-t} + c$

$t=0 \quad u(0)=0 \rightsquigarrow c = 1$

$\rightsquigarrow u - \dfrac{u^2}{2} = 1 - e^{-t} \qquad 2u - u^2 = 2 - 2e^{-t}$

$u^2 - 2u + 2(1-e^{-t}) = 0 \qquad u = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 8 + 8e^{-t}}}{2}$

$u = 1 \pm \sqrt{2e^{-t} - 1} \quad \xrightarrow{t=0\ u=0} \quad u = 1 - \sqrt{2e^{-t}-1}$

VERIFICA:

$u' = -\dfrac{1}{2}(2e^{-t}-1)^{-1/2}(-2e^{-t}) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{2e^{-t}-1}} = \dfrac{e^{-t}}{1-u}$

TEMPO DI VITA

$\sqrt{2e^{-t}-1}$ DECRESCENTE E > 0 PER $t=0$

$2e^{-t} - 1 = 0 \qquad e^{-t} = \dfrac{1}{2} \qquad -t = \log\dfrac{1}{2} \qquad t = \log 2$

PER $t = \log 2$ $\quad u = 1 \rightsquigarrow$ SI HA BREAK DOWN

$\rightsquigarrow$ LA SOLUZIONE ESISTE PER $0 \leq t < \log 2$

(b) $u - \frac{u^2}{2} = -e^{-\delta} + c$

$\delta = 0 \quad u(0) = \alpha \quad \rightsquigarrow \quad c = 1 + \alpha - \frac{\alpha^2}{2}$

$u^2 - 2u + (2 + 2\alpha - \alpha^2 - 2e^{-\delta}) = 0$

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8 - 8\alpha + 4\alpha^2 + 8e^{-\delta}}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1 - 2\alpha + \alpha^2 + 2e^{-\delta}}$$

$$\delta = 0 \quad u = 1 \pm \sqrt{(\alpha-1)^2} = 1 \pm |\alpha - 1| = \begin{cases} 1 + |\alpha-1| = \alpha & \alpha \geq 1 \\ 1 - |\alpha-1| = \alpha & \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 1 + \sqrt{(\alpha-1)^2 - 2 + 2e^{-\delta}} & \alpha \geq 1 \\ u = 1 - \sqrt{(\alpha-1)^2 - 2 + 2e^{-\delta}} & \alpha < 1 \end{cases}$$

VERIFICA:

$$u' = \pm \frac{1}{2} \left((\alpha-1)^2 - 2 + 2e^{-\delta} \right)^{-1/2} (-2e^{-\delta}) = \frac{e^{-\delta}}{\mp \sqrt{(\alpha-1)^2 - 2 + 2e^{-\delta}}}$$

$\underline{\alpha = 1}$ $\quad u(0) = 1 \quad$ SI HA BREAK DOWN IN 0

$\underline{\alpha > 1}$ $\quad u(0) = \alpha > 1 \quad u = 1 + \sqrt{(\alpha-1)^2 - 2 + 2e^{-\delta}}$

$u' = \frac{e^{-\delta}}{1-u} < 0 \quad \rightsquigarrow \quad u$ DECRESCENTE

$(\alpha-1)^2 - 2 + 2e^{-\delta} = 0 \qquad e^{-\delta} = 1 - \frac{(\alpha-1)^2}{2}$

$-\delta = \log\left(1 - \frac{(\alpha-1)^2}{2}\right) \qquad \delta = \log\left(\frac{2}{1 + 2\alpha - \alpha^2}\right)$

$1 + 2\alpha - \alpha^2 > 0 \qquad \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \qquad \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$\rightsquigarrow \underline{1 < \alpha < 1 + \sqrt{2}}$

SI HA BREAK DOWN IN $\delta = \log\left(\frac{2}{1 + 2\alpha - \alpha^2}\right)$

$\underline{\alpha < 1}$ $\quad u(0) = \alpha < 1 \quad u = 1 - \sqrt{(\alpha-1)^2 - 2 + 2e^{-\delta}}$

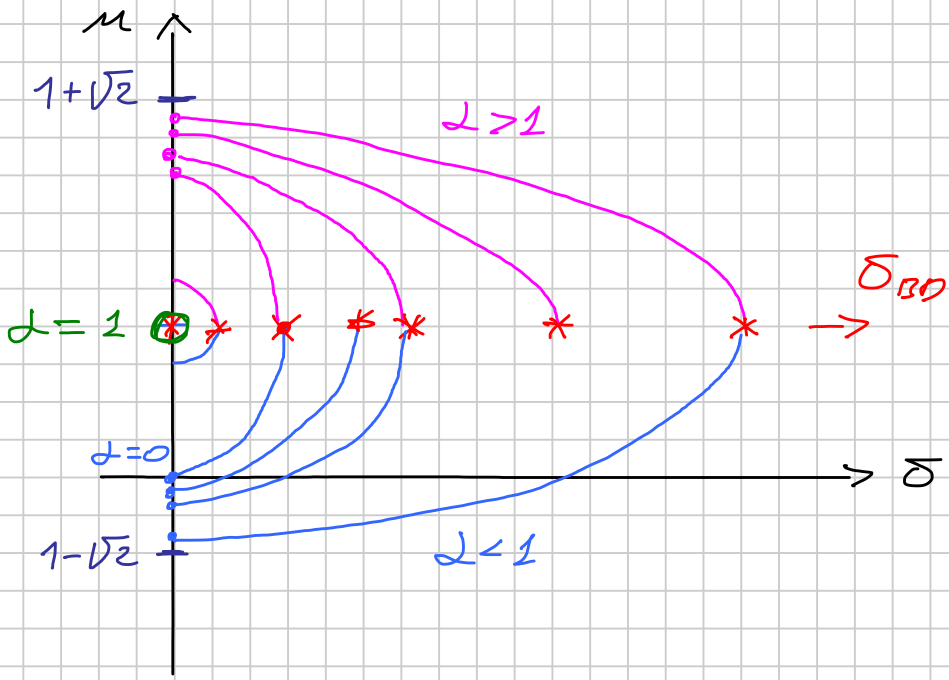
$$u' = \frac{e^{-\delta}}{1-u} > 0 \quad \rightsquigarrow \quad u \text{ È CRESCENTE}$$

$$(\alpha-1)^2 - 2 + 2e^{-\delta} = 0 \rightsquigarrow \delta = \lg\left(\frac{2}{1+2\alpha-\alpha^2}\right)$$

$$1 + 2\alpha - \alpha^2 > 0 \qquad \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \qquad \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\rightsquigarrow \underline{1 - \sqrt{2} < \alpha < 1}$$

SI HA BREAK DOWN IN $\delta = \lg\left(\frac{2}{1+2\alpha-\alpha^2}\right)$



$\rightsquigarrow$ NON SI HA MAI ESISTENZA GLOBALE NEL FUTURO

6. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

(a) Determinare per quali valori reali di x è ben definita.

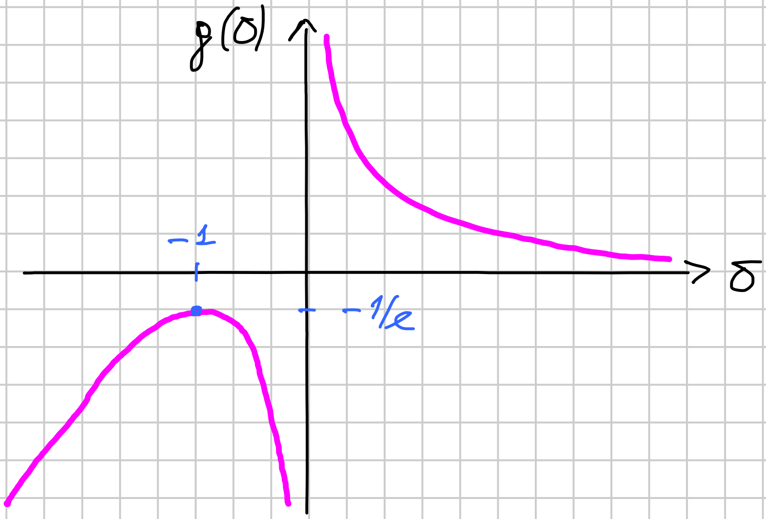
(b) Determinare se per $x > 0$ la funzione è limitata superiormente/inferiormente e se ammette massimo/minimo (ed in caso affermativo determinare i punti di massimo/minimo).

(a) $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$

$g(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ $\quad \lim_{t \to +\infty} g(t) = 0^+ \quad \lim_{t\to -\infty} g(t) = -\infty$

$\lim_{t \to 0^+} g(t) = +\infty \quad \lim_{t \to 0^-} g(t) = -\infty$

$$g'(t) = \frac{-t e^{-t} - e^{-t}}{t^2} = -\frac{(t+1)\, e^{-t}}{t^2}$$



$f(x)$ É BEN DEFINITA PER $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(b) $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \qquad x > 0$

PER $x > 0$ L'INTEGRANDA É > 0

$$\text{SEGNO} \Rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \iff x^2 < x \rightsquigarrow 0 < x < 1 \\ f(x) = 0 \iff x^2 = x \rightsquigarrow x = 1 \\ f(x) > 0 \iff x^2 > x \rightsquigarrow x > 1 \end{cases}$$

COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^1 \frac{e^{-\sigma}}{\sigma}d\sigma + \int_1^{x^2}\frac{e^{-\sigma}}{\sigma}d\sigma\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^1 \frac{e^{-\sigma}}{\sigma}d\sigma - \int_{x^2}^1 \frac{e^{-\sigma}}{\sigma}d\sigma\right) =$$

$$\sigma = \mu^2 \qquad d\sigma = 2\mu\, d\mu \qquad \int_{x^2}^1 \frac{e^{-\sigma}}{\sigma}d\sigma = \int_x^1 \frac{e^{-\mu^2}}{\mu^{\cancel{2}}}\,2\cancel{\mu}\,d\mu$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{e^{-\sigma}-2e^{-\sigma^2}}{\sigma}d\sigma = -\lim_{x\to 0^+}\int_x^1\frac{2e^{-\sigma^2}-e^{-\sigma}}{\sigma}d\sigma$$

C.A. CON $\dfrac{2e^{-\sigma^2}}{\sigma}$ PER $\sigma\to 0^+$

$$\frac{2e^{-\sigma^2}-e^{-\sigma}}{\cancel{\sigma}}\,\frac{\cancel{\sigma}}{2e^{-\sigma^2}} = 1 - \frac{e^{-\sigma}}{2e^{-\sigma^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{2e^{-\sigma^2}}{\sigma}d\sigma = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1\frac{2}{\sigma e^{\sigma^2}} \geq \lim_{x\to 0^+}\int_x^1\frac{2}{\sigma^3}d\sigma = +\infty$$

$$\rightsquigarrow -\lim_{x\to 0^+}\int_x^1\frac{2e^{-\sigma^2}-e^{-\sigma}}{\sigma}d\sigma = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_1^{x^2}\frac{e^{-\sigma}}{\sigma}d\sigma - \int_1^x\frac{e^{-\sigma}}{\sigma}d\sigma\right) = 0$$

INFATTI: $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{\sigma e^{\sigma}}d\sigma \leq \int_1^M\frac{1}{\sigma^2}d\sigma < +\infty$

$\rightsquigarrow f(x)$ È $\begin{cases}\text{ILLIMITATA INFERIORMENTE} \\ \text{LIMITATA SUPERIORMENTE}\end{cases} \rightsquigarrow$ ✗ WEIERSTRASS ESISTE IL MAX

STUDIO DELLA DERIVATA

$$f(x)=\int_x^{x^2}\frac{e^{-\delta}}{\delta}\,d\delta = F(x^2)-F(x)$$

$$F(x)=\int_1^{x}\frac{e^{-\delta}}{\delta}\,d\delta$$

$$f'(x)=F'(x^2)\cdot 2x - F'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^{\cancel{2}}}\cdot 2\cancel{x} - \frac{e^{-x}}{x} =$$

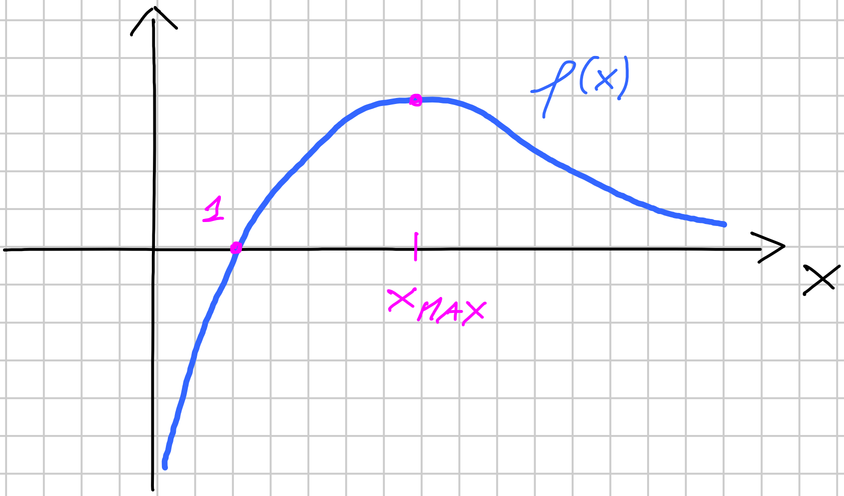
$$= \frac{2e^{-x^2}-e^{-x}}{x}$$

$$f'(x)=0 \qquad 2e^{-x^2}-e^{-x}=0 \qquad 2e^{-x^2}=e^{-x}$$

$$2e^{x}=e^{x^2} \qquad \lg 2e^{x}=x^2$$

$$x+\lg 2 = x^2 \qquad x^2-x-\lg 2=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\lg 2}}{2} \rightsquigarrow x_{MAX}=\frac{1+\sqrt{1+4\lg 2}}{2}$$



7. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = 5x_n - x_n^2 - 4, \qquad x_0 = \alpha.$$

(a) Nel caso $\alpha = \sqrt[3]{7}$, determinare il limite di x_n.

(b) Determinare per quali valori di α la successione ha limite reale.

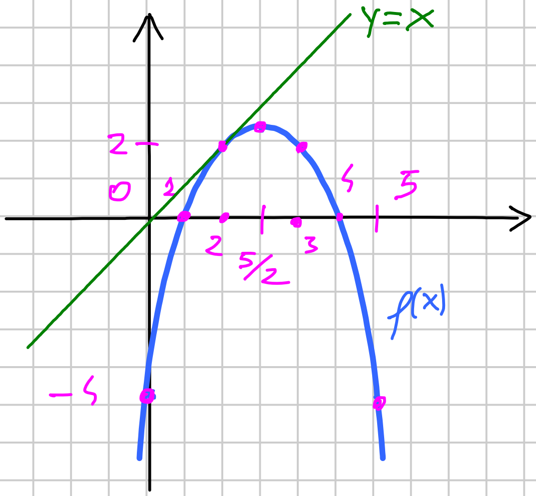
(c) Tornando al caso $\alpha = \sqrt[3]{7}$, determinare

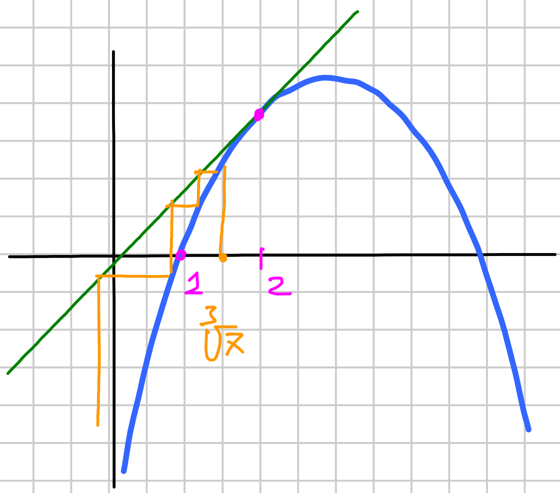
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log|\log|x_n||}{n}.$$

(a) $x_{n+1} = 5x_n - x_n^2 - 4 \qquad x_0 = \sqrt[3]{7} \qquad 1 < x_0 < 2$

$f(x) = 5x - x^2 - 4 \qquad f(x) = 0 \qquad x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2} \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

$f'(x) = 5 - 2x = 0 \quad x = \frac{5}{2} \qquad f(x) = x \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad x = 2$





PIANO

(i) $x_n \le \sqrt[3]{7} < 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \le x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \qquad \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

(iv) $x_n \to -\infty$

DIM

(i) INDUZIONE $\qquad x_0 = \sqrt[3]{7} < 2$

$x_n \le \sqrt[3]{7} \implies x_{n+1} \le \sqrt[3]{7}$

APPLICO $f(x)$ SENZA CAMBIARE I VERSI PERCHÈ SIAMO NEL TRATTO DI STRETT. CRESC.

$$f(x_n) = x_{n+1} \leq f(\sqrt[3]{7}) = 5\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{59} - 6 \leq \sqrt[3]{7}$$

(ii) RICORRENZA + DISEQUAZIONE

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \rightsquigarrow \quad 5x_n - x_n^2 - 6 \leq x_n$$

$$x_n^2 - 6x_n + 6 \geq 0 \qquad (x_n - 2)^2 \geq 0 \qquad \forall x_n \in \mathbb{R}$$

(iii) $x_n \to \ell \qquad \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

(i) + (ii) + TEOR. SUCC. MONOTONE NON LIMITATE INFERIORMENTE

(iv) $x_n \to -\infty$

SOSTITUISCO ℓ NELLA RICORRENZA

$$\ell = 5\ell - \ell^2 - 6 \qquad \ell^2 - 6\ell + 6 = 0 \qquad \ell = 2$$

PER (i) $\Rightarrow \quad \ell = -\infty$

$\rightsquigarrow \quad x_n \to -\infty$

(b) LA SUCCESSIONE HA LIMITE REALE $\ell = 2$

$\forall \alpha \quad 2 \leq \alpha \leq 3$

(c) $\alpha = \sqrt[3]{7}$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\lg|\lg|x_n||}{n}$

DEFINITIVAMENTE $(|x_n| \to +\infty)$ $\quad a_n = \frac{\lg|\lg|x_n||}{n} \geq 0$

CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}\,\frac{\lg|\lg|x_{n+1}||}{\lg|\lg|x_n||} =$$

$$\lg|x_{n+1}| = \lg|5x_n - x_n^2 - 4| = \lg|x_n^2| + \lg\left|\frac{5}{x_n} - 1 - \frac{4}{x_n^2}\right| =$$

$$= 2\lg|x_n| + \lg\left|\frac{5}{x_n} - 1 - \frac{4}{x_n^2}\right|$$

$$= \frac{n}{n+1}\,\frac{\lg\left(2\lg|x_n| + \lg\left|\frac{5}{x_n} - 1 - \frac{4}{x_n^2}\right|\right)}{\lg\lg|x_n|} =$$

$$= \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}\,\frac{\lg\lg|x_n| + \underbrace{\lg\left(2 + \frac{\lg\left|\frac{5}{x_n} - 1 - \frac{4}{x_n^2}\right|}{\lg|x_n|}\right)}_{\to 1}}{\lg\lg|x_n|} \to 1$$

METODO ALTERNATIVO

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lg|\lg|x_n||}{n} = \lim_{n\to+\infty} \lg\sqrt[n]{|\lg|x_n||}$$

STUDIO IL LIMITE: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\lg|x_n||}$ $\qquad b_n = |\lg|x_n||$

CRITERIO RAPPORTO-RADICE

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{|\lg|x_{n+1}||}{|\lg|x_n||} = \left|\frac{\lg|5x_n - x_n^2 - 4|}{\lg|x_n|}\right| =$$

$$= \left| \frac{\lg|x_n^2| + \lg\left|\frac{5}{x_n} - 2 - \frac{5}{x_n^2}\right|}{\lg|x_n|} \right| =$$

$$= \left| \frac{2\lg|x_n| + \lg\left|\frac{5}{x_n} - 2 - \frac{5}{x_n^2}\right|}{\lg|x_n|} \right| \to 2$$

$$\rightsquigarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\lg|\lg|x_n||}{n} = \lim_{n\to+\infty} \lg \sqrt[n]{|\lg|x_n||} = \lg 2$$