

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 8 Gennaio 2015

1. Consideriamo nello spazio i quattro punti

$$A = (0, 1, 0), \quad B = (2, 3, 1), \quad C = (-1, 1, 0), \quad D = (0, 2, 1).$$

- (a) Determinare la distanza di B dal piano ACD .
- (b) Determinare il punto della retta AC più vicino a B .
- (c) Determinare la mutua posizione delle rette AB e CD .

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b , il sistema lineare

$$\begin{aligned}x + 2z &= 7 \\y + 2w &= b \\x + y + 2z + aw &= 5\end{aligned}$$

- (a) Determinare per quali valori dei parametri il sistema non ha soluzioni.
- (b) Determinare per quali valori dei parametri l'insieme delle soluzioni ha dimensione massima, ed in tal caso determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo le quattro matrici

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Tre delle quattro matrici sono simili tra loro. Determinare l'intrusa.
 - (b) Determinare la forma canonica di Jordan della prima matrice (quella a sinistra) ed una matrice di cambio di base che la porta in tale forma.
4. (a) Scrivere l'espressione della trasformazione del piano che rappresenta la rotazione di 60° in senso orario intorno al punto $(2, 1)$.
- (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta di equazione $x + 2y = 1$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.