BY GIMUSI 21/07/15

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Scritto d'esame di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. Si consideri la funzione $f(x,y) = x^4y^2 + y^4 - 2x^3y$. (0,0) Boh
   (a) Determinare gli eventuali punti stazionari di f e classificarli. s.l imprex
   (b) Determinare estremo superiore e inferiore di f su $\mathbb{R}^2$ precisando se si tratta di massimo e/o minimo   inf = 0   sup = ∞ = max

2. Sia T il triangolo di $\mathbb{R}^2$ di vertici $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Calcolare

$$\int_T x\,dx\,dy, \qquad \int_T |x-y|\,dx\,dy.$$

$= 1/3 \qquad = \cancel{1}/6$

Non fatto. 3. Sia $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \leq 3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ e indichiamo con ∂V il suo bordo orientato con la normale esterna a V. Sia $F(x,y,z) = (x + e^y, z + y^2, x + \sin y)$. Calcolare il flusso di F attraverso ∂V.

4. Sia ω la forma di $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega = (2x + ze^{xz})\,dx + z\,dy + (y + xe^{xz})\,dz.$$

   (a) Stabilire se ω è esatta in $\mathbb{R}^3$ ed in caso affermativo determinarne la primitiva che vale zero nell'origine. $x^2 + e^{xz} + zy - 1 = F(x,y,z)$
   (b) Calcolare $\int_\gamma \omega$ ove γ è definita da $\int_\gamma \omega = 3$

$$(x(t), y(t), z(t)) = (t(t^2-1), 2t+1, t^5), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

$(1(1-1), 2+1, 1) = 0, 3, 1$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1) $f(x,y) = x^5y^2 + y^5 - 2x^3y$

(a) PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} f_x = \overset{2}{\cancel{5}}x^3y^2 - \overset{3}{\cancel{6}}x^2y = 0 \\ f_y = \cancel{2}x^5y + \overset{2}{\cancel{5}}y^3 - \cancel{2}x^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2y(2xy-3) = 0 \\ x^5y + 2y^3 - x^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2y = 0 \\ 2xy - 3 = 0 \end{cases}$$

$$x^2y = 0 \quad \begin{cases} x^2 = 0 \quad x = 0 \rightsquigarrow 2y^3 = 0 \quad y = 0 \\ y = 0 \quad -x^3 = 0 \rightsquigarrow x = 0 \end{cases} \rightsquigarrow P_0 = (0,0)$$

$$2xy - 3 = 0 \quad xy = \frac{3}{2} \quad \rightsquigarrow \frac{3}{2}x^3 + 2\left(\frac{3}{2x}\right)^3 - x^3 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^3 + \cancel{2}\cdot\frac{27}{\cancel{8}_4}\frac{1}{x^3} = 0 \qquad x^6 + \frac{27}{2} = 0$$

$$x = (-27/2)^{1/6} \qquad \rightsquigarrow \emptyset$$

NATURA P.TI STAZIONARI

$P_0 = (0,0)$

$$\begin{cases} x = 0 \quad f(0,y) = y^5 \geq 0 \quad \forall y \in R \\ y = x \quad f(x,x) = x^6 + x^5 - 2x^5 = x^5(x^2 - 1) \leq 0 \quad \forall x \in (-1,1) \end{cases}$$

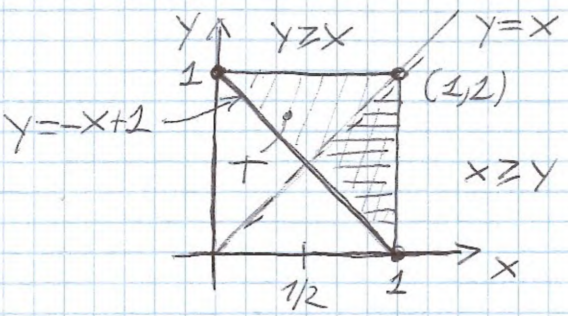
$\rightsquigarrow P_0$ P.TO DI SELLA

(b) $$\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ x=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ x=0}} y^5 = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ y=1/x}} f(x,y) = \lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ y=1/x}} x^2 + \frac{1}{x^5} - 2x^2 = -\infty$$

$\rightsquigarrow \sup f = +\infty \qquad \inf f = -\infty$

2) TRIANGOLO (0,1) (1,0) (1,1)



$$\int_T x\,dx\,dy = \int_0^1\int_{-x+1}^{1} x\,dy\,dx = \int_0^1 x(1+x-1)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx = [x^3/3]_0^1 = 1/3$$

$$\int_T x\,dx\,dy = y_G \cdot A_T = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = 1/3$$

$$\int_T |x-y|\,dx\,dy = 2\int_{1/2}^{1}\int_{-x+1}^{x} (x-y)\,dy\,dx = 2\int_{1/2}^{1}\left[xy-\frac{y^2}{2}\right]_{-x+1}^{x} dx =$$

$$= 2\int_{1/2}^{1}\left(x^2-\cancel{\frac{x^2}{2}}+x^2-x+\cancel{\frac{x^2}{2}}-x+\frac{1}{2}\right)dx =$$

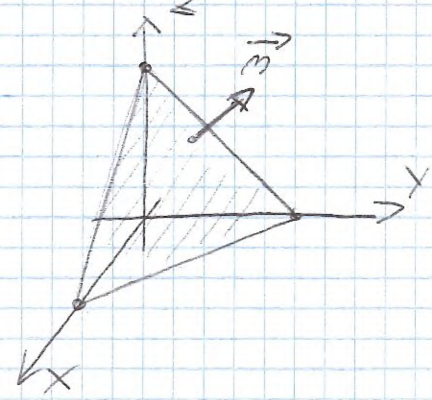
$$= 2\int_{1/2}^{1}\left(2x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\left[\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{1}{2}x\right]_{1/2}^{1} =$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}-1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\,\frac{1}{\cancel{8}_4}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right) = \cancel{2}\,\frac{8-6-1}{\cancel{12}\;6} = \frac{1}{6}$$

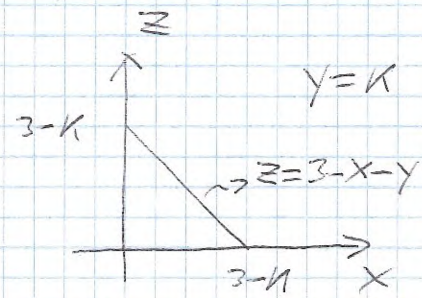
3) $\begin{cases} V:\ x+y+z \le 3 \quad x \ge 0 \quad y \ge 0 \quad z \ge 0 \\ \vec{F} = (x+e^{y},\ z+y^{2},\ x+\cos y) \end{cases}$

$$\operatorname{div} \vec{F} = 1 + 2y + 0 = 1 + 2y$$



$$\iint_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^3 \int_0^{3-y} \int_0^{3-y-z} (1+2y)\, dx\, dz\, dy =$$



$$= \int_0^3 \int_0^{3-y} (3 - y - z + 6y - 2y^2 - 2zy)\, dz\, dy =$$

$$= \int_0^3 \left[3z + 5yz - \frac{z^2}{2} - 2y^2 z - yz^2 \right]_0^{3-y} dy =$$

$$= \int_0^3 \left(9 - \cancel{3y} + 15y - 5y^2 - \frac{9}{2} - \frac{y^2}{2} + \cancel{3y} - \cancel{6y^2} + 2y^3 - 9y - y^3 + \cancel{6y^2} \right) dy =$$

$$= \int_0^3 \left(y^3 - \frac{11}{2} y^2 + 6y + \frac{9}{2} \right) dy = \left[\frac{y^4}{4} - \frac{11}{6} y^3 + 3y^2 + \frac{9}{2} y \right]_0^3 =$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{11}{\cancel{6}_{2}} \cancel{27}^{\,9} + 3\cdot 9 + \frac{27}{2} = \frac{81 - 198 + 108 + 54}{4} =$$

$$= \frac{243 - 198}{4} = \frac{45}{4}$$

$$\begin{array}{c} \qquad\quad A \qquad\qquad\qquad\qquad B \qquad\qquad\qquad C \end{array}$$

5) $\omega = (2x + z e^{xz})dx + z\,dy + (y + x e^{xz})\,dz$

(a) $\begin{cases} C_y - B_z = 1 - 1 = 0 \\ C_x - A_z = e^{xz} + xz e^{xz} - (e^{xz} + zx e^{xz}) = 0 \\ B_x - A_y = 0 - 0 = 0 \end{cases}$

$\rightsquigarrow \omega$ È ESATTA

$\exists\, F(x,y,z)$ t.c. $A = \dfrac{\partial F}{\partial x} \quad B = \dfrac{\partial F}{\partial y} \quad C = \dfrac{\partial F}{\partial z}$

$\begin{cases} F_x = 2x + z e^{xz} & F = x^2 + e^{xz} + g(y,z) \\ F_y = g_y(y,z) = z & g(y,z) = zy + h(y) \\ F_z = x e^{xz} + y + h'(z) = y + x e^{xz} & h'(y) = 0 \quad h(y) = c \end{cases}$

$F = x^2 + e^{xz} + zy + c \qquad F(0,0,0) = 0 + 1 + 0 + c = 0 \qquad c = -1$

$\rightsquigarrow F(x,y,z) = x^2 + e^{xz} + zy - 1$

(b) $\gamma : \ (t(t^2-1),\ 2t+1,\ t^5) \qquad 0 \le t \le 1$

$t = 0 \quad P_0 = (0,1,0)$

$t = 1 \quad P_1 = (0,3,1)$

$\displaystyle\int_\gamma \omega \underset{\substack{\downarrow \\ \omega \text{ ESATTA}}}{=} F(P_1) - F(P_0) = (0 + 1 + 3 - 1) - (0 + 1 + 0 - 1) =$

$= 3 - 0 = 3$