

## Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 16 Dicembre 2013

1. Consideriamo nel piano cartesiano i punti  $P = (2, 1)$  e  $Q = (4, 4)$  e la retta  $r$  di equazione  $5x + y + 2 = 0$ .

- (a) Determinare quale punto si ottiene ruotando  $Q$  di  $45^\circ$  in senso antiorario intorno al punto  $P$ .
- (b) Determinare l'equazione cartesiana della retta che si ottiene ruotando  $r$  di  $45^\circ$  in senso antiorario intorno al punto  $P$ .
- (c) Determinare quale trasformazione del piano si ottiene facendo prima la simmetria rispetto ad  $r$  e poi la simmetria rispetto all'asse  $y$ .

2. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = y^2 + 2xy - 6yz + axz,$$

in cui  $a$  è un parametro reale.

- (a) Nel caso  $a = 1$ , determinare un sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 2 su cui la forma risulta definita positiva.
- (b) Determinare la segnatura della forma al variare del parametro  $a$ .

3. Sia  $b$  un parametro reale, e sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare tale che

$$f(1, 2) = (6, b), \quad f(1, 3) = (8, b + 5).$$

- (a) Determinare per quali valori di  $b$  l'applicazione  $f$  ammette una base ortonormale di autovettori, ed in tali casi determinare una tale base.
- (b) Determinare per quali valori di  $b$  l'applicazione  $f$  è diagonalizzabile sui reali.
- (c) Determinare per quali valori di  $b$  l'applicazione  $f$  *non* è diagonalizzabile sui complessi, ed in tali casi determinare la sua forma di Jordan reale.

4. Sia  $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$  lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 2.

- (a) Dimostrare che la formula

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0)q(0) + 3p(1)q(1) + 5p(2)q(2)$$

rappresenta un prodotto scalare definito positivo in  $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ .

- (b) Determinare la matrice ad esso associata rispetto alla base  $\{1, x, x^2\}$ .
- (c) Determinare una base ortonormale rispetto a tale prodotto scalare.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.  
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.