Prendiamo un'applicazione lineare da $\mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ rappresentata dalla matrice simmetrica (come da ipotesi)

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

per il *Fatto 4* esiste almeno un autovalore reale. È facile verificare che $\lambda = -1$ è autovalore; ad esso corrisponde un autosoazio di dimensione 2, una base di tale autospazio è

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia $v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ un autovettore corrispondente a λ con $\|v\| = 1$.

Prendo ora una <u>nuova base</u> in cui il primo vettore è v ed i restanti due vettori sono perpendicolari a v, siano

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

tali vettori (faccio notare che w_1 non è ortogonale a w_2).

Ora come nella dimostrazione mi chiedo: "Cosa diventa A in questa nuova base?"

Io questa domanda la interpreto così :"applicare A ai vettori della <u>nuova base</u> ed ottenere così l'applicazione che prende in INPUT componenti rispetto alla <u>nuova base</u> ed in OUTPUT restituisce componenti rispetto alla canonica; successivamente scrivere l'applicazione che prende in INPUT componenti rispetto alla <u>nuova base</u> e restituisce in OUTPUT componenti rispetto alla <u>nuova base</u>".

Se ho interpretato bene la domanda, dovrei fare questo semplice conto: $M^{-1}AM$, dove

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad ed \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Il che porta a questo risultato:

$$M^{-1}\mathrm{AM} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha come colonne Av, Aw_1, Aw_2 "visti" però nella nuova base; inoltre è evidente che la sua sottomatrice formata da 2° e 3° riga e 2° e 3° colonna non è simmetrica, di conseguenza non posso applicare l'ipotesi induttiva e proseguire con la dimostrazione.

Ora senza perdermi in lunghi conti, se invece prendessi come nuovissima base $\{v, w_1^*, w_2^*\}$ dove v è lo stesso di prima e prendo sta volta gli altri due vettori (colonna) ortogonali a v ed in modo che la nuovissima base sia **Ortonormale**, ottengo con conti analoghi ai precedenti una forma del tipo:

$$S = N^{-1}AN$$

Dove N è la matrice che ha come colonne i vettori della nuovissima base.

Ora, essendo N formata da vettori (colonna) tutti ortogonali tra loro e tutti di norma uguale ad 1, posso dire che la matrice N è ortogonale, ovvero $N^{-1} = N^t$. Inoltre A era simmetrica per ipotesi, ovvero $A^t = A$

Se ora provo a calcolare S^t ottengo:

$$S^t = (N^{-1}AN)^t = N^t A^t (N^{-1})^t = N^{-1}AN = S$$

Cioè S è simmetrica. Non solo, si può dire che S sarà del tipo:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

Questo perché, la prima colonna rappresenta le componenti del vettore realizzato applicando a v l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice A (ovvero $Av = \lambda v$), "vista" però nella nuovissima base, per cui tali componenti sono proprio la 1° colonna di S. Poi per simmetria dovrò per forza avere gli zeri "in testa" agli altri due vettori (oppure la si può vedere in questo modo: dato che w_1^* e w_2^* stanno in un sottospazio ortogonale a v, allora Aw_1^* e Aw_2^* stanno ancora nel sottospazio ortogonale a v per cui "visti" nella nuovissima base, hanno uno zero "in testa). Ora la sottomatrice formata da 2° e 3° riga e 2° e 3° colonna di S è simmetrica per cui posso concludere la dimostrazione del teorema.