1. Consideriamo i seguenti 3 punti nello spazio:

$$A = (1,0,1), \qquad B = (0,2,0), \qquad C = (-1,2,-3).$$

(a) Determinare la lunghezza ed il piede dell'altezza del triangolo ABC uscente dal vertice A.

(b) Determinare l'area del triangolo ABC.

(c) Sia r la retta passante per C e parallela alla retta AB. Determinare il punto di intersezione e l'angolo formato tra r ed il piano $x - y = 0$.

14/02/2014

(a) Retta BC: $B + t(B-C) = (0,2,0) + t(1,0,3) = \boxed{(t, 2, 3t)}$

$\text{Dist}^2(A, \text{retta}) = (t-1)^2 + 4 + (3t-1)^2 = t^2 - 2t + 1 + 4 + 9t^2 - 6t + 1$

$= 10t^2 - 8t + 6$

Il minimo si ha per $20t - 8 = 0 \rightsquigarrow t = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{piede dell'altezza}: \left(\frac{2}{5}, 2, \frac{6}{5}\right)}$

Lunghezza^2: $\cancel{10}^{\,2} \cdot \frac{4}{\cancel{25}_{\,5}} - \frac{16}{5} + 6 = -\frac{8}{5} + 6 = \frac{22}{5}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{lunghezza} = \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{5}}}$

(b) Area $= \frac{1}{2}\, BC \cdot \underset{\text{altezza}}{AH} = \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{44} = \boxed{\sqrt{11}}$

(c) Retta per C e $\parallel$ ad AB: $C + t(A-B) = \boxed{(-1,2,-3) + t(1,-2,1)}$

$= (-1+t, 2-2t, -3+t)$

Intersezione con piano $x - y = 0$:

$-1 + t - 2 + 2t = 0 \rightsquigarrow t = 1 \rightsquigarrow \boxed{(0, 0, -2)}$

Angolo tra r e $\perp$ al piano $\quad \cos\theta = \dfrac{\langle (1,-2,1), (1,-1,0) \rangle}{\sqrt{6}\,\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Quindi $\theta = 30°$ e dunque angolo richiesto $= \boxed{60°}$

Alternativa per (a): $\underbrace{\text{intersezione tra retta BC}}_{(t,2,3t)}$ e $\underbrace{\text{piano per A} \perp \text{a retta BC}}_{\text{piano } x+3z=4}$.

$t + 9t = 4 \rightsquigarrow t = \frac{2}{5}$ ok.

Alternativa per (b): $B - A = (-1,2,-1)$

$C - A = (-2,2,-4)$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-6,-2,2)$$

Area $= \frac{1}{2}\sqrt{36+4+4} = \sqrt{11}$.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + ay + z &= 0 \\ 2x - y + bz &= 2 \\ 3x + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Determinare per quali valori dei parametri il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & b & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Det $\neq 0$

A = incompleta   A' = completa

Rango (A') ≥ 2, quindi l'unico modo per avere infinite soluzioni è che sia

Rango (A) = Rango (A') = 2

Questo comporta (anzi equivale a) l'annullarsi di 2 determinanti

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad -5+6a-10a=0 \qquad 4a=-5 \qquad \boxed{a=-\frac{5}{4}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & b & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad 5b+6-10-4=0 \qquad 5b=8 \qquad \boxed{b=\frac{8}{5}}$$

Risolviamo il caso specifico e vediamo che ci sono infinite soluzioni:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{8}{5} & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -5 & 4 & 0 \\ 10 & -5 & 8 & 10 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 4 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 15 & -4 & 20 \\ 0 & +15 & -4 & 20 \end{matrix}$$

Ottimo

$$4x - 5y + 4z = 0$$

$$15y - 4z = 20 \qquad z = t, \quad 15y = 20 + 4t \leadsto y = \frac{4}{3} + \frac{4}{15}t$$

$$4x = 5y - 4z = \frac{20}{3} + \frac{4}{3}t - 4t = \frac{20}{3} - \frac{8}{3}t \leadsto x = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t$$

$$(x,y,z) = \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t, \frac{4}{3} + \frac{4}{15}t, t\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0\right) + t\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{15}, 1\right)$$

$$= \boxed{\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0\right) + t(-10, 4, 15)}$$

Risolve il NON omogeneo   Risolve l'omogeneo

VERIFICA

3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ a & 7 \end{pmatrix}$, dove a è un parametro reale.

(a) Determinare per quali valori di a la matrice A ammette l'autovalore $\lambda = 5$. Per tali valori di A, determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

(b) Determinare per quali valori di a esiste una matrice *ortogonale* M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale, ed in tal caso determinare tale matrice diagonale.

(a) $\mathrm{Tr} = 8 \Rightarrow$ se un autov. è 5, l'altro è 3 $\Rightarrow \mathrm{Det} = 15$

$7 + 3a = 15 \rightsquigarrow 3a = 8 \rightsquigarrow \boxed{a = \frac{8}{3}}$

Autospazio di $\lambda = 5$ $\quad \begin{cases} x - 3y = 5x \\ \frac{8}{3}x + 7y = 5y \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 8x + 6y = 0 \end{cases} \quad \boxed{(3, -4)}$

Autospazio di $\lambda = 3$ $\quad \begin{cases} x - 3y = 3x \\ \frac{8}{3}x + 7y = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 8x + 12y = 0 \end{cases} \quad \boxed{(3, -2)}$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6}$$

Verifica: $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ \frac{8}{3} & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ -20 & -6 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Ok.

(b) Per il teo. spettrale esiste se e solo se A è simmetrica, cioè se e solo se $\boxed{a = -3}$.

In tal caso la matrice diagonale corrispondente è quella con gli autovalori, cioè $\quad x^2 - 8x - 2 = 0$

$x = 4 \pm \sqrt{16 + 2} = 4 \pm \sqrt{18} = 4 \pm 3\sqrt{2}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4+3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4-3\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

Alternativa per (a): $\mathrm{Det}(A - 5\,\mathrm{Id}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ a & 2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -8 + 3a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{8}{3}$.

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio W di equazione cartesiana $x+y-2z=0$ ed il prodotto scalare rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.

(b) Determinare una base ortogonale di W (rispetto al prodotto scalare rappresentato da B) costituita da vettori a coordinate intere.

(c) Determinare $W^\perp$ (sempre rispetto al prodotto scalare di matrice B).

(a) Sylvester 1-2-3 : $\mathrm{Det}_1 = 3$, $\mathrm{Det}_2 = 8$, $\mathrm{Det}_3 = 27-1-1-3-3-3 = 16$

$\underbrace{+\,+}_{P}\underbrace{\,+}_{P}\underbrace{\,+}_{P}$ $\rightsquigarrow$ definita positiva (3P)

(b) Base di W : $\underbrace{(-1,1,0)}_{v_1}$, $\underbrace{(2,0,1)}_{v_2}$ (si vede ad occhio)

Faccio GS e ottengo $w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (2,0,1) - \frac{-8}{8}(-1,1,0) = (1,1,1)$$

$$\langle v_2, w_1\rangle = (2\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -8$$

$$\langle w_1, w_1\rangle = (-1\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 8$$

$$\boxed{\text{Base} : (-1,1,0)\ ,\ (1,1,1)}$$

Verifica che sta in W e che sia ⊥ all'altro

$$(1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

(c) Devo trovare un vettore ortogonale a $(-1,1,0)$ e a $(1,1,1)$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - z \\ -x + 3y - z \\ -x - y + 3z \end{pmatrix}$$

Ortogonale a $(-1, 1, 0)$: $-3x + y + z - x + 3y - z = -4x + 4y = 0$

Ortogonale a $(1, 1, 1)$: $3x - y - z - x + 3y - z - x - y + 3z = x + y + z = 0$

$x = y$ $\qquad x = y = 1 \qquad z = -2$

$x + y + z = 0$

$$\boxed{W^{\perp} = \text{Span}\{(1, 1, -2)\}}$$