Titolo nota 03/01/2014

1. Consideriamo i seguenti 4 punti nello spazio:

$$A = (1,0,1), \qquad B = (0,2,0), \qquad C = (-1,2,0), \qquad D = (0,1,1).$$

(a) Determinare l'area del triangolo ABC.

(b) Determinare il volume del tetraedro $ABCD$.

(c) Determinare l'angolo che la faccia ABC forma con la faccia BCD.

$B-A = (-1,2,-1) \qquad C-A = (-2,2,-1) \qquad D-A = (-1,1,0)$

(a) $\begin{pmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0,1,2) \rightsquigarrow \text{Area} = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+2^2} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

In alternativa: $AB = \sqrt{6}$, $AC = 3$, $\cos\theta = \frac{2+4+1}{3\sqrt{6}} = \frac{7}{3\sqrt{6}}$

$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{49}{54}} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}} \qquad \text{Area} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\theta = \frac{1}{2} 3\sqrt{6}\,\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

(b) $6\,\text{Volume} = \left|\text{Det}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = |2+2-2-1| = 1 \Rightarrow \boxed{\text{Vol} = \frac{1}{6}}$

In alternativa: piano $ABC \rightsquigarrow y+2z-2=0$ (verifico sostituendo A,B,C)

Distanza $(D, \text{piano } ABC) = \frac{|1+2-2|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ = altezza tetraedro

Volume $= \frac{1}{3}$ Area base · altezza $= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{6}$

(c) Vettore $\perp$ piano ABC: $\boxed{(0,1,2)}$ già calcolato e verificato

$C-B = (-1,0,0) \qquad D-B = (0,-1,1)$

Vettore $\perp$ piano BCD: $\boxed{(0,1,1)}$ (si vede e si verifica ad occhio)

$\cos\theta = \frac{|0+1+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\theta = \arccos\frac{3}{\sqrt{10}}}$

— o — o —

2. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{aligned} \lambda x + 2y &= 1 \\ 2x + \lambda z &= 1 \\ y + 4z &= \mu \end{aligned}$$

(a) Determinare per quali valori *reali* dei parametri λ e μ il sistema ammette soluzione unica.

(b) Determinare per quali valori *complessi* dei parametri λ e μ il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4 & \mu \end{array}\right) \qquad A$$

Soluzione unica $\Leftrightarrow$ Det $A \neq 0$

$\Leftrightarrow -\lambda^2 - 16 \neq 0$

$\Leftrightarrow \lambda \neq \pm 4i$

(a) Sui reali soluzione unica sempre

(b) Visto che rango $(A) \geq 2$, l'unico modo per avere infinite soluzioni è che sia rango $(A) = 2$, cioè $\lambda = \pm 4i$, e rango $(A') = 2$, il che equivale all'annullamento di (3ª e 4ª colonna diventano comb. lin. delle prime 2)

$$\text{Det}\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mu \end{pmatrix} = 2 - 4\mu - \lambda = 0 \Leftrightarrow 4\mu = 2 - \lambda \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}$$

Quindi c'è non unicità per $\lambda = 4i,\ \mu = \frac{1}{2} - i$ e per $\lambda = -4i,\ \mu = \frac{1}{2} + i$

$\boxed{\lambda = 4i,\ \mu = \frac{1}{2} - i}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4i & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4i & 1 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{2} - i \end{array}\right) \qquad \begin{array}{cccc} 4i & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & 2i - 1 \end{array}$$

stessa cosa

$z = t,\ -2y = 8t + 2i - 1 \Rightarrow y = -4t - i + \frac{1}{2}$, $4ix = -2y + 1 = 8t + 2i$

$x = -2it + \frac{1}{2}$

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - i, 0\right) + t(-2i, -4, 1)}$$

$\boxed{\lambda = -4i,\ \mu = \frac{1}{2} + i}$

Essendo i coeff. i coniugati dei precedenti, anche le soluzioni saranno il coniugato delle precedenti:

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + i, 0\right) + t(2i, -4, 1)}$$

(una verifica per sostituzione potrebbe tranquillizzare ...)

— o — o —

3. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 3. Consideriamo l'applicazione lineare da $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ in $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ definita da

$$p(x) \rightarrow (x+1)p'(x) + p(2).$$

(a) Determinare gli autovalori dell'applicazione ed i relativi autospazi.

(b) Determinare la forma canonica di Jordan dell'applicazione ed una base nella quale la matrice assume tale forma.

Immagine degli elementi della base

$$1 \rightarrow 1$$
$$x \rightarrow (x+1)\cdot 1 + 2 = x+3$$
$$x^2 \rightarrow (x+1)\cdot 2x + 4 = 2x^2+2x+4$$
$$x^3 \rightarrow (x+1)\cdot 3x^2+8 = 3x^3+3x^2+8$$

Matrice nella base canonica $1, x, x^2, x^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Gli autovalori sono $1, 1, 2, 3$.
Vediamo gli autospazi

$\boxed{\lambda = 1}$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rango 3, ker = Span $(1,0,0,0)$

$\boxed{\text{Autospazio} = \text{Span}(1)}$

$\boxed{\lambda = 2}$
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -a + 3\overset{6}{b} + 4\overset{4}{c} + 8\overset{0}{d} &= 0 \qquad a = 10 \\ -b + 2c &= 0 \qquad c = 1,\ b = 2 \\ d &= 0 \\ d &= 0 \qquad d = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Autospazio} = \text{Span}(10 + 2x + x^2)}$

(Verifica: $(x+1)(2+2x) + 18 = 2x + 2x^2 + 2 + 2x + 18 = 20 + 4x + 2x^2$ OK)

$\boxed{\lambda=3}$ $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} -2\overset{9}{a} + 3\overset{12}{b} + 4\overset{8}{c} + 8d &= 0 \\ -2b + 2c &= 0 \\ -c + 3d &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a &= \tfrac{29}{2} \\ b &= 3 \\ c &= 3 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Autospazio} = \text{Span}(29 + 6x + 6x^2 + 2x^3)}$ $\big(\rightsquigarrow (6 + 12x + 6x^2)(x+1) + p(2) =$

$= \cancel{6x} + 12x^2 + 6x^3 + \cancel{6} + \cancel{12x} + 6x^2 + \cancel{29} + \cancel{36} + \cancel{16}$

$= 87 + 18x + 18x^2 + 6x^3$ ok$\big)$

(b) Poiché $\lambda = 1$ ha molt. alg. $= 2$ e molt. geo. $= 1$, c'è un blocco da 2.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Base: $\boxed{v_1 = 1}$ (autovalore di $\lambda=1$)

$\boxed{v_3 = 10 + 2x + x^2}$ (... $\lambda=2$)

$\boxed{v_4 = 29 + 6x + 6x^2 + 2x^3}$ (... $\lambda=3$)

Per trovare v_2 impongo $v_2 \to v_2 + v_1$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \cancel{a} + 3b + 4c + 8d &= \cancel{a} + 1 & &\rightsquigarrow b = \tfrac{1}{3} \\ b + 2c &= b & &\rightsquigarrow a \text{ libero} \\ 2c + 3d &= c & &\rightsquigarrow c = 0 \\ 3d &= d & &\rightsquigarrow d = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{v_2 = \frac{1}{3}x}$ $\left((x+1) \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}x + 1 \quad \text{ok!} \right)$

— o — o —

4. Consideriamo la seguente forma quadratica in $\mathbb{R}^3$:

$$q(x, y, z) = 16x^2 + 6y^2 + z^2 + 2yz - 2\alpha xy.$$

(a) Nel caso particolare $\alpha = 9$, determinare (fornendo esplicitamente delle basi costituite da vettori a coordinate intere) un sottospazio W_+ di dimensione 2 su cui la forma è definita positiva, ed un sottospazio W_- di dimensione 1 su cui la forma è definita negativa.

(b) Determinare, al variare di α, la segnatura della forma quadratica.

(a) $16x^2 + 6y^2 + z^2 + 2yz - 18xy$

$$= \boxed{16x^2 - 2 \cdot 4x \cdot \frac{9}{4}y + \frac{81}{16}y^2} - \frac{81}{16}y^2 + 5y^2 + \boxed{y^2 + z^2 + 2yz}$$

$$= \left(4x - \frac{9}{4}y\right)^2 + (y+z)^2 - \frac{1}{16}y^2$$

$W_+ \rightsquigarrow$ cartesiana $y = 0 \rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Base: } (1,0,0),\ (0,0,1)}$

$W_- \rightsquigarrow$ cartesiana: $4x - \frac{9}{4}y = 0$, $y + z = 0$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Base } (9, 16, -16)}$

(b) $\begin{pmatrix} 16 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

D'ufficio   Det 1   Det 2

Sylvester 3-2-1: $+ + +$

Tutto dipende dal Det_3 generale

$96 - \alpha^2 - 16 = 80 - \alpha^2$

- $80 - \alpha^2 > 0 \iff \alpha^2 < 80 \iff |\alpha| < 4\sqrt{5}$ $+++$ $\rightsquigarrow$ Def. positiva
- $80 - \alpha^2 = 0 \iff \alpha = \pm 4\sqrt{5}$ $++0$ $\rightsquigarrow$ Semidef. pos.
- $80 - \alpha^2 < 0 \iff |\alpha| > 4\sqrt{5}$ $++-$ $\rightsquigarrow$ Indefinita