

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica
Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Siano

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}, \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{1 + x^2 + 4y^4}.$$

- (a) Determinare estremo inferiore e superiore di f in A specificando se si tratta di minimo/massimo e in tal caso i corrispondenti punti di minimo/massimo.
(b) (Bonus) Sia $A_R := A \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ e sia

$$I_R := \int_{A_R} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Calcolare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R^\beta I_R.$$

2. Sia $T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Calcolare

$$\int_T |x + y + z - 1| \, dx \, dy \, dz.$$

3. Si consideri per $\alpha > 0$ l'insieme $D_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^\alpha, x \geq 1\}$. Stabilire per quali $\alpha > 0$ converge l'integrale

$$\int_{D_\alpha} \frac{\arctan(xy)}{x^2 + y^2} \, dx \, dy.$$

4. Si consideri la curva del piano data da $\gamma(t) = (\sin t - \cos t, \sin t + \cos t)$ per $0 \leq t \leq \pi$.

- (a) Provare che γ è semplice e farne un disegno approssimativo.
(b) Determinare le intersezioni fra la curva γ e la retta $x + y = 0$.
(c) Sia D la porzione di piano racchiusa da γ e dalla retta $x + y = 0$. Calcolare l'area di D .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.