[B1] Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$, costituita da vettori a coordinate intere, che comprenda il vettore $(1, 2, 3)$.

Aggiungo un vettore ortogonale a caso: $(-2, 1, 0)$.

Ne cerco un terzo $\perp$ ad entrambi:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-3, -6, 5)$$

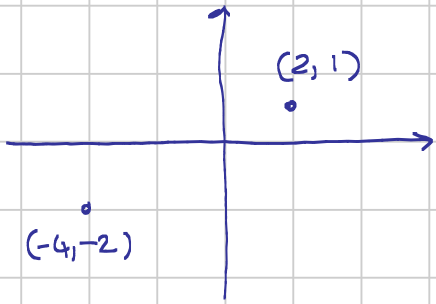
(Verifica a mente!)

Una possibilità è $\boxed{(1,2,3),\ (-2,1,0),\ (3,6,-5)}$

— o — o —

[B2] Nel piano cartesiano, scrivere l'espressione analitica dell'omotetia che lascia fisso il punto $(2, 1)$, e manda l'origine nel punto $(-4, -2)$.

Il coeff. di omotetia è 3 e quindi



$$(x, y) \longrightarrow (x-2, y-1)$$
$$\longrightarrow (3x-6, 3y-3)$$
$$\longrightarrow (3x-4, 3y-2)$$

Quindi $\boxed{f(x,y) = (3x-4, 3y-2)}$ (Verifica!)

— o — o —

[L1] Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i punti

$$A = (1,1,0,0), \qquad B = (0,0,1,1), \qquad C = (1,2,3,4).$$

(a) Determinare l'equazione dell'iperpiano passante per C e perpendicolare alla retta AB.

(b) Determinare l'area del triangolo ABC.

(a) Direzione retta $AB = B - A = (-1,-1,1,1)$

Iperpiano:

$$\boxed{-x-y+z+w = 4}$$

ottenuto imponendo passaggio per C.

(b) lunghezza $AB = \|B-A\| = 2$

lunghezza $AC = \|C-A\| = \|(0,1,3,4)\| = \sqrt{26}$

$$\cos(B\hat{A}C) = \frac{\langle B-A, C-A\rangle}{\|B-A\|\cdot\|C-A\|} = \frac{6}{2\cdot\sqrt{26}} = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

$$\sin(B\hat{A}C) = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}} = \sqrt{1-\frac{9}{26}}$$

$$\text{Area triangolo} = \frac{1}{2}\,AB\cdot AC\cdot\sin(B\hat{A}C) = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{\sqrt{26}}\cdot\frac{\sqrt{17}}{\cancel{\sqrt{26}}} = \boxed{\sqrt{17}}$$

— o — o —

[L2] Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x - y + 4z, 2x + 3y - 4z).$$

(a) Determinare il ker di f.

(b) Determinare una rappresentazione cartesiana (cioè mediante equazioni) dell'immagine di f.

(c) Determinare l'insieme dei vettori che hanno come immagine il vettore $(1, 2, 2)$.

Nella base canonica l'applicazione è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$ Facile verifica: rango $= 2$

(a) Il ker ha dim 1. Risolviamo il sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow z = 1, \; y = 2, \; x = -1$$

$\boxed{\ker = \text{Span}((-1, 2, 1))}$ (Verifica)

(b) L'immagine è generata dalle prime 2 colonne. Basta trovare un vettore a loro ortogonale

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (8, -1, -3)$$ (Verifica!)

$\boxed{8x - y - 3z = 0}$ (Eq. cart. immagine)

Alternativa: cercare comb. lin. nulla di $x+y-z$, $2x-y+4z$, $2x+3y-4z$

(c) Il vettore dato è la prima colonna della matrice, cioè $f(1, 0, 0)$. Quindi i vettori richiesti sono quelli del tipo

$\boxed{(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(-1, 2, 1)}$ (Verifica!)

Alternativa: risolvere bovinamente il sistema $f(x, y, z) = (1, 2, 2)$

—o—o—