

## Funzioni 5

**Argomenti:** studio di funzione classico

**Difficoltà:** \*\*

**Prerequisiti:** studio globale di funzioni

Studiare in senso classico le seguenti funzioni, tracciandone un grafico approssimativo.

Al solo fine di ottenere una tabella numerica confrontabile, si chiede di indicare quanti sono i punti di massimo/minimo (M/m) locale/globale (l/g) (ovviamente quelli globali sono anche locali), il numero degli asintoti orizzontali, verticali, obliqui (con l'accordo che una stessa retta che è asintoto orizzontale od obliquo a  $\pm\infty$  conta due volte), il numero delle zone di convessità/concavità, ed il numero di punti di flesso.

Funzione	Max/min				Asintoti			Convessità		
	m.l.	m.g.	M.l.	M.g.	Or.	Vt.	Ob.	Conv.	Conc.	Fls.
$x^3$	/	/	/	/	/	/	/	1	1	1
$x - x^3$	1	/	1	/	/	/	/	1	1	1
$(x^2 - 1)^2$	2	2	1	/	/	/	/	2	1	2
$e^{x^2}$	1	1	/	/	/	/	/	1	/	/
$e^{-x^2}$	/	/	1	1	2	/	/	2	1	2
$e^{-x^3}$	/	/	/	/	1	/	/	2	1	1
$e^{1/x}$	/	/	/	/	2	1	/	1	1	/
$e^{-1/x}$	/	/	/	/	2	1	/	1	1	/
$e^{-1/x^2}$	/	/	/	/	2	/	/	1	2	2
$xe^x$	1	1	/	/	1	/	/	1	1	1
$xe^{-x}$	/	/	1	1	1	/	/	1	1	1
$x^2e^{-x}$	1	1	1	/	1	/	/	2	1	2
$\arctan x$	/	/	/	/	2	/	/	1	1	1
$\arctan(x^2)$	1	1	/	/	2	/	/	1	2	2
$\arctan(x^3)$	/	/	/	/	2	/	/	2	2	3
$\arctan^2 x$	1	1	/	/	2	/	/	1	2	2
$x \arctan x$	1	1	/	/	/	/	/	1	/	/

Le funzioni di questo esercizio sono davvero di base, dunque è importante arrivare a coglierne gli aspetti essenziali del grafico in pochi minuti (direi meno di 3).

## Funzioni 6

**Argomenti:** studio di funzione classico

**Difficoltà:** \*\*

**Prerequisiti:** studio globale di funzioni

Studiare in senso classico le seguenti funzioni, tracciandone un grafico approssimativo.

Al solo fine di ottenere una tabella numerica confrontabile, si chiede di indicare quanti sono i punti di massimo/minimo (M/m) locale/globale (l/g) (ovviamente quelli globali sono anche locali), il numero degli asintoti orizzontali, verticali, obliqui (con l'accordo che una stessa retta che è asintoto orizzontale od obliquo a  $\pm\infty$  conta due volte), il numero delle zone di convessità/concavità, ed il numero di punti di flesso.

Funzione	Max/min				Asintoti			Convessità		
	m.l.	m.g.	M.l.	M.g.	Or.	Vt.	Ob.	Conv.	Conc.	Fls.
$\frac{1}{x}$	/	/	/	/	2	2	/	1	1	/
$\frac{x}{x+1}$	/	/	/	/	2	2	/	1	1	/
$\frac{1}{x^2}$	/	/	/	/	2	1	/	2	/	/
$\frac{1}{x^2+1}$	/	/	1	1	2	/	/	2	1	2
$\frac{1}{x^3+1}$	/	/	/	/	2	1	/	2	2	2
$\frac{1}{x^2-1}$	/	/	1	/	2	2	/	2	1	/
$\frac{x}{x^2+1}$	1	1	1	1	2	/	/	2	2	3
$\frac{x}{x^2-1}$	/	/	/	/	2	2	/	2	2	1
$\frac{x^2}{x-1}$	1	/	1	/	/	1	2	1	1	/
$\frac{x^2}{x^2+1}$	1	1	/	/	2	/	/	1	2	2
$\frac{x^2}{x^2-1}$	1	/	/	/	2	2	/	2	1	/
$\frac{x^4-x^2+1}{x^3}$	1	/	1	/	/	/	/	1	1	/

Vale la stessa nota della scheda di esercizi precedente.

## Funzioni 7

**Argomenti:** studio di funzione classico

**Difficoltà:** \*\*

**Prerequisiti:** studio globale di funzioni

Studiare in senso classico le seguenti funzioni, tracciandone un grafico approssimativo.

Al solo fine di ottenere una tabella numerica confrontabile, si chiede di indicare quanti sono i punti di massimo/minimo (M/m) locale/globale (l/g) (ovviamente quelli globali sono anche locali), il numero degli asintoti orizzontali, verticali, obliqui (con l'accordo che una stessa retta che è asintoto orizzontale od obliquo a  $\pm\infty$  conta due volte), il numero delle zone di convessità/concavità, ed il numero di punti di flesso.

Funzione	Max/min				Asintoti			Convessità		
	m.l.	m.g.	M.l.	M.g.	Or.	Vt.	Ob.	Conv.	Conc.	Fls.
$ x ^{2/3}$	1	1	/	/	/	/	/	/	2	/
$ x ^{4/3}$	1	1	/	/	/	/	/	1	/	/
$\sqrt{1+x^2}$	1	1	/	/	/	/	2	1	/	/
$\sqrt{1-x^2}$	2	2	1	1	/	/	/	/	1	/
$\sqrt{1+x^3}$	1	1	/	/	/	/	/	1	1	1
$\sqrt[3]{1+x^2}$	1	1	/	/	/	/	/	1	2	2
$\sqrt[3]{1-x^2}$	/	/	1	1	/	/	/	1	2	2
$\sqrt[3]{1+x^3}$	/	/	/	/	/	/	2	2	1	2
$(1+x^2)^{-1/2}$	/	/	1	1	2	/	/	2	1	2
$(1-x^2)^{-1/2}$	1	1	/	/	/	2	/	1	/	/
$\log(1+x^2)$	1	1	/	/	/	/	/	1	2	2
$x \log x$	1	1	/	/	/	/	/	1	/	/
$\log^2 x$	1	1	/	/	/	1	/	1	1	1
$(\log x)^{-1}$	/	/	/	/	1	1	/	2	1	1
$\frac{\log x}{x}$	/	/	1	1	1	1	/	1	1	1
$\frac{x}{\log x}$	1	/	/	/	/	1	/	1	2	1
$\tanh x$	/	/	/	/	4	/	/	1	1	1

Vale la stessa nota della scheda di esercizi precedente.

## Funzioni 8

**Argomenti:** massimi e minimi, punti di massimo e di minimo

**Difficoltà:** ★★

**Prerequisiti:** monotonia e segno della derivata, studio globale di funzioni

Determinare massimo e minimo delle funzioni date sugli intervalli indicati, precisando anche la natura dei punti di massimo e di minimo, cioè se sono stazionari interni, singolari interni, o di bordo. Ad esempio, per il minimo, indicare 8 (2/3/1) se il minimo vale 8 ed è raggiunto in 2 punti stazionari interni, 3 punti singolari interni ed un punto di bordo.

Funzione	Insieme	Minimo	Massimo	Insieme	Minimo	Massimo
$x^2$	$[-1, 1]$	0 (1/0/0)	1 (0/0/2)	$[-1, 2]$	0 (1/0/0)	4 (0/0/1)
$x^2$	$[1, 3]$	1 (0/0/1)	9 (0/0/1)	$[-4, -1]$	1 (0/0/1)	16 (0/0/1)
$ x $	$[-2, 1]$	1 (0/0/1)	2 (0/0/1)	$[-2, -1]$	1 (0/0/1)	2 (0/0/1)
$\sin x$	$[0, \pi]$	0 (0/0/1)	1 (1/0/0)	$[0, 4]$	$\sin 4$ (0/0/1)	1 (1/0/0)
$\cos x$	$[-\pi, \pi]$	-1 (0/0/2)	1 (1/0/0)	$[0, 4]$	-1 (1/0/0)	1 (0/0/1)
$ \cos x $	$[-\pi, \pi]$	0 (0/2/0)	1 (1/0/2)	$[0, 4]$	0 (0/1/0)	1 (1/0/1)
$\sin  x $	$[-1, 1]$	0 (0/1/0)	$\sin 1$ (0/0/1)	$[-1, 2]$	0 (0/1/0)	1 (1/0/0)
$x3^{-x}$	$[0, 1/2]$	0 (0/0/1)	$\sqrt[3]{6}$ (0/0/1)	$[0, 2]$	0 (0/0/1)	$\frac{1}{2} \log 3$ (1/0/0)
$x^3 - x^2$	$[0, 1]$	$-4/27$ (1/0/0)	0 (0/0/2)	$[-2, 0]$	-12 (0/0/1)	0 (0/0/1)
$\sqrt[3]{x^2 - 1}$	$[-1, 1]$	-1 (1/0/0)	0 (0/0/2)	$[1, 3]$	0 (0/0/1)	2 (0/0/1)

Determinare estremo inferiore e superiore delle funzioni date sugli insiemi indicati, precisando di volta in volta se si tratta di minimo e massimo.

Funzione	Insieme	Inf/min	Sup/Max	Insieme	Inf/min	Sup/Max
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$-\pi/2$ ✓	$\pi/2$ ✓	$(-\infty, 0)$	$-\pi/2$ ✓	0 ✓
$\arctan(x^2)$	$\mathbb{R}$	0 = min	$\pi/2$ ✓	$(-\infty, 0)$	0 ✓	$\pi/2$ ✓
$e^{-x^2}$	$[-1, 1]$	$1/e = \min$	1 = max	$\mathbb{R}$	0 ✓	1 = max
$x - \arctan x$	$[0, +\infty)$	0 = min	$+\infty$ ✓	$[0, 1]$	0 = min	$1 - \arctan 1 = \max$
$\frac{1}{x} + x^2$	$(0, +\infty)$	$\frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \min$	$+\infty$ ✓	$(0, 1)$	$\frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \min$	$+\infty$ ✓
$e^x - x$	$\mathbb{R}$	1 = min	$+\infty$ ✓	$(-1, 1)$	1 = min	$e - 1$ ✓
$e^{1/x}$	$(0, 1]$	$e = \min$	$+\infty$ ✓	$(-\infty, 0)$	0 ✓	1 ✓