[B1] Determinare per quali valori del parametro reale a il vettore $(1, 1)$ risulta autovettore della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}.$$

Deve essere $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3+a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Quindi $\lambda = 3$ e $3+a = 3$, da cui $\boxed{a = 0}$

— o — o —

[B2] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ che abbia come ker il sottospazio

$$\mathrm{Span}\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\}.$$

Un possibile esempio è

$$\boxed{f(x, y, z, w) = (y - x, w - z)}$$

È facile verificare che $(1,1,0,0)$ e $(1,1,1,1)$ appartengono al ker.
Inoltre $f(0,1,0,0) = (1,0)$ e $f(0,0,0,1) = (0,1)$, dunque l'immagine ha dimensione 2. Dal Rank-Nullity segue che $\dim(\ker) = 2$, e quindi il ker è quello previsto.

— o — o —

Achtung! Non basta verificare che $(1,1,0,0)$ e $(1,1,1,1)$ stanno nel ker, perché il ker potrebbe essere più grande del loro Span.

[L1] Consideriamo nello spazio i quattro punti

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (1, 2, 3), \qquad C = (0, 1, 1), \qquad D = (1, 1, 1).$$

Determinare l'angolo che la retta AB forma con il piano passante per B, C, D.

Direzione retta $AB = B - A = \boxed{(0,2,2)}$

Vettore $\perp$ al piano BCD = vettore $\perp$ a $B - C = (1,1,2)$ e
$B - D = (0,1,2)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{(0,-2,1)}$$

(verifica!)

Coseno angolo tra i 2 vettori $= \dfrac{(0,2,2) \cdot (0,-2,1)}{\|(0,2,2)\| \cdot \|(0,-2,1)\|} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

Considerando l'angolo in $[0°, 90°]$ il coseno è $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

L'angolo richiesto è il complementare a 90°, cioè

$$\boxed{90° - \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}}$$

[L2] Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + 2y + az = 8, \\ 2x + ay - z = 9. \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori del parametro reale a il sistema ammette soluzioni.

(b) Determinare per quali valori del parametro reale a l'insieme delle soluzioni del sistema *non* interseca il piano di equazione $x + y + z = 0$.

(a) Consideriamo la matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$

- Se $a \neq 0$ il minore con 1^a e 3^a colonna è $\neq 0$
- Se $a = 0$ il minore con 1^a e 2^a colonna è $\neq 0$

Quindi la matrice dei coeff. ha sempre rango 2, e di conseguenza anche la matrice completa ha sempre rango 2.

Per Rouché-Capelli, il sistema ammette sol. $\boxed{\text{per ogni } a \in \mathbb{R}}$.

(b) Occorre aggiungere $x + y + z = 0$ come 3^a equazione e vedere quando il sistema risultante NON ha soluzioni

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & a & 8 \\ 2 & a & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Det matrice coeff. $= a^2 - 2 + 2a - a^2 - 4 + a$

$= 3a - 6 = 0 \iff a = 2$

- Per $a \neq 2$ il sistema ha sempre soluzione (unica)
- Per $a = 2$ il sistema non ha soluzioni, perché la prima e terza equazione non sono compatibili.

Quindi $\boxed{a = 2}$.

— o — o —