ESERCIZI MAX/MIN (PARAMETRIZZAZIONI)

Questo OK

- $f(x,y) = xy$

  $D = [-2,2] \times [-2,2]$

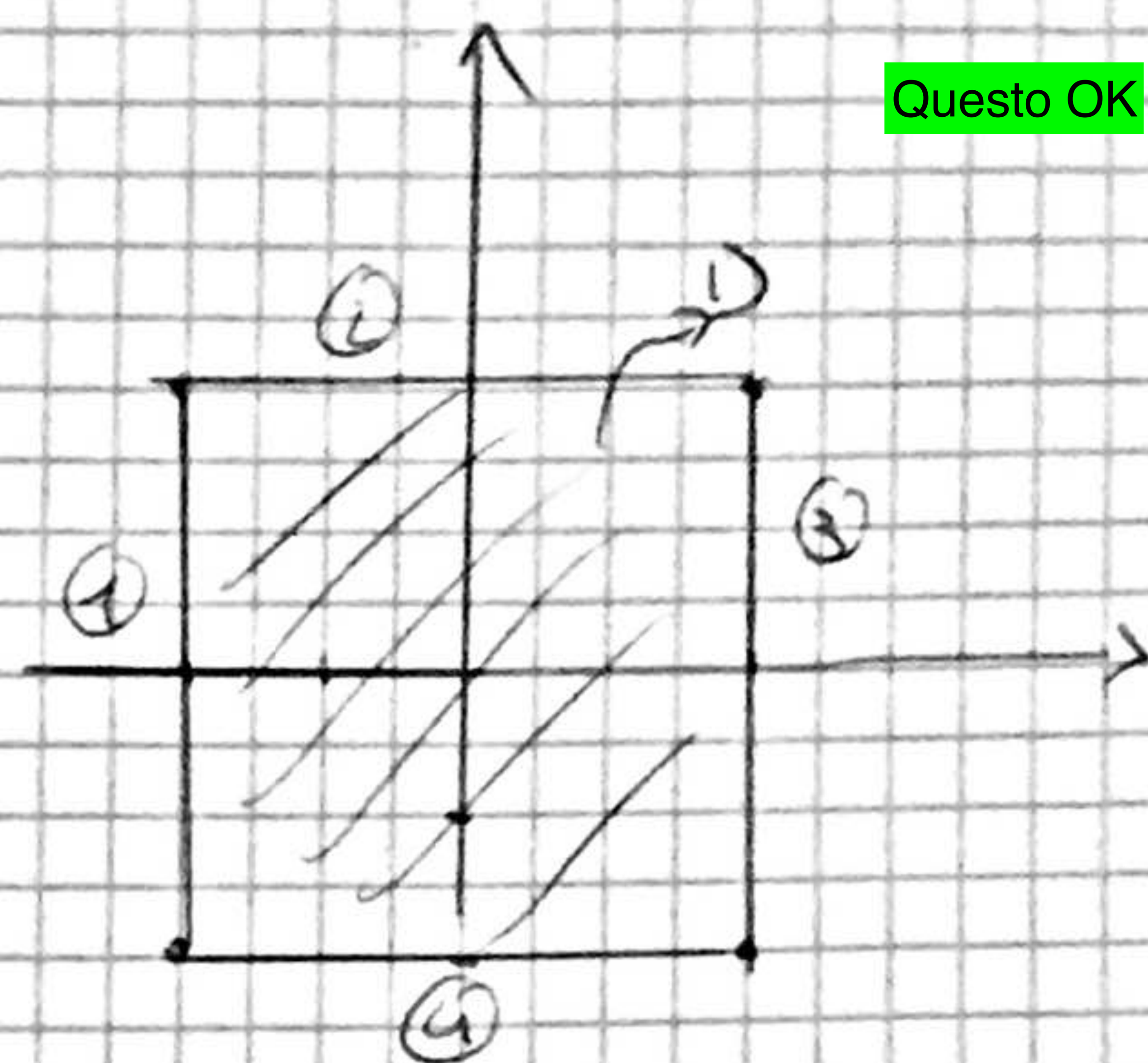
	-2	2
-2	$(-2,-2)$	$(2,-2)$
2	$(2,-2)$	$(2,2)$

D è limitato

f è continua

$\Downarrow$ W

$\exists$ max / min



- PUNTI STAZIONARI INTERNI

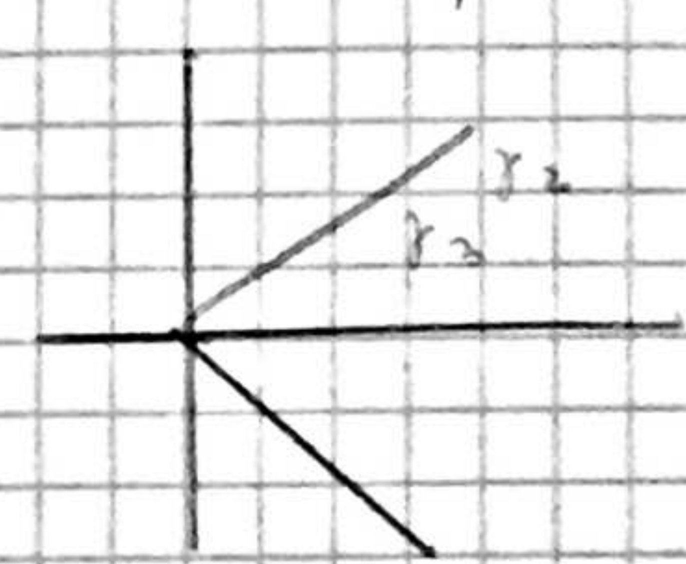
$\nabla f(x,y) = (y, x) = (0,0)$

il punto $(0,0)$ è stazionario interno

- PARAMETRIZZAZIONE $\to$ STUDIO IL BORDO FATTO DA 4 CURVE

$\gamma_1 = (-2, t)$ $\quad f_{\gamma_1} = g_1(t) = -2t$ $\quad$ ha max in $(-2,-2)$ e min

$-2 < t < +2$



$\gamma_2 = (t, 2)$ $\quad f_{\gamma_2} = g_2(t) = 2t$ $\quad -2 < t < 2$

ha max $(2,2)$ min $(-2,2)$

$\gamma_3 = (2, t)$ $\quad f_{\gamma_3} = g_3(t) = 2t$

stesso discorso max $(2,2)$ min $(+2,2)$

$\gamma_4 = (t, -2)$ $\quad f_{\gamma_4} = g_4(t) = -2t$ $\quad$ max in $(-2,-2)$ $\quad$ min $(+2,-2)$

CANDIDATI MAX

$(-2,-2)$, $(2,2)$, $(-2,-2)$ $(2,2)$ $\quad f(\text{pt. max}) = 4$

CANDIDATI MIN

$(-2,2)$ $(-2,2)$ $(2,-2)$ $(2,-2)$ $\quad f(\text{pt. min}) = -4$

MAX MIN MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

$f(x,y) = xy$

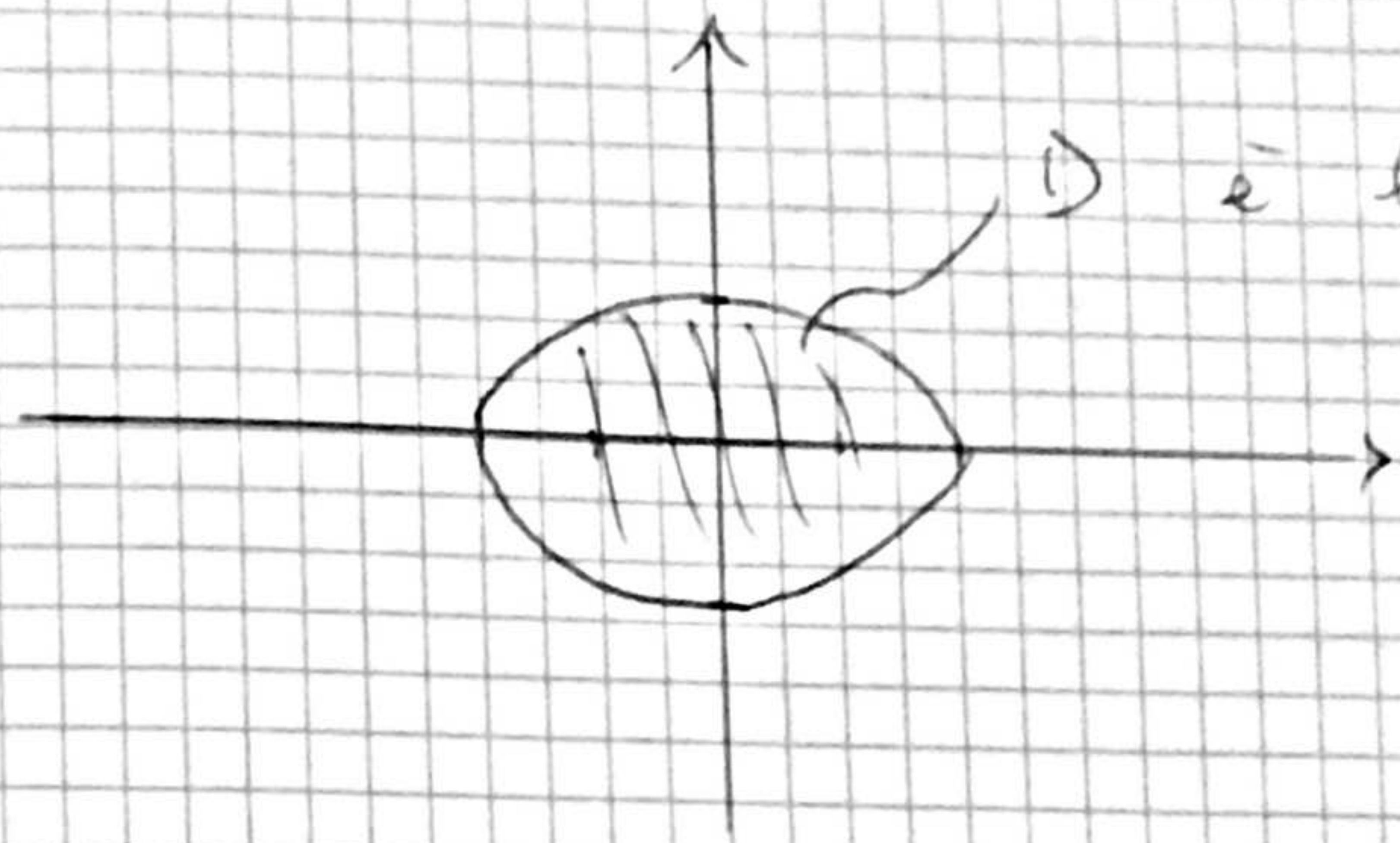
$D = x^2 + 2y^2 \leq 4$

D è limitato

f è continua

$\Rightarrow \exists$ max/min

W



PUNTI STAZIONARI INTERNI

$\nabla f = (y, x) = (0,0) \Rightarrow (0,0)$ è un punto staz. interno

STUDIO IL BORDO $\rightarrow$ uso i moltiplicatori

• PUNTI SINGOLARI

$$\begin{cases} 2x + 2y^2 = 0 \\ 4y + x^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 \leq 4 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = -y^2 \\ 4y + y^4 = 0 \end{matrix}$$

non ha soluzioni

Derivate!!!!

• USO MOLTIPLICATORI

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 4 \; (3) \end{cases}$$

$2\lambda = \frac{y}{x} \rightarrow x^2 = 2y^2 \rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$ che non soddisfa la (3)

$\rightarrow x^2 + x^2 = 4$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$ $\quad y = \pm 1$

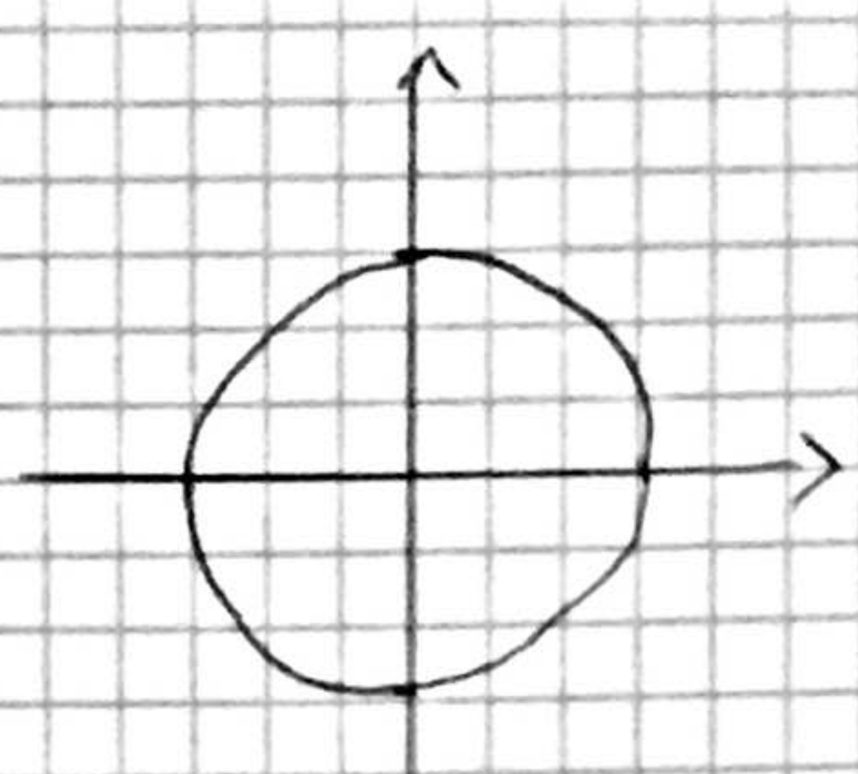
$\exists$ CANDIDATI MAX/MIN: $\underbrace{(-\sqrt{2}, -1)}_{max}$ $\underbrace{(\sqrt{2}, 1)}_{min}$ $\underbrace{(\sqrt{2}, -1)}_{min}$ $\underbrace{(\sqrt{2}, 1)}_{max}$

max $f = \sqrt{2}$ 2 punti di max

min $f = -\sqrt{2}$ 2 punti di min

$f(x,y) = x + xy^2$

$D = \{(x,y) : x^2+y^2=1\}$



D è limitato $\Rightarrow$ f ha max e min

f è continua $\quad W$

STUDIO IL BORDO: uso i moltiplicatori

PUNTI SINGOLARI

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$\emptyset$ non ci sono punti singolari

MOLTIPLICATORI

$$\begin{cases} 1+y^2 = 2\lambda x \\ 2xy = 2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$\lambda = -\frac{1}{2} \quad x=-1 \quad y=0$ NO

$\lambda = \frac{1}{2} \quad x=1, \; y=0$ NO

$\rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

qui dovresti riportare i conti!

$\max f = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{9}$ 2 massimi

$\min f = -\frac{4}{9}\sqrt{6}$ 2 minimi

ESERCIZIO PAG 37

• $f = x+y+z$

$x \in [0,1] \to 0 \le x \le 1$
$y \in [0,2] \to 0 \le y \le 2$
$z \in [0,3] \to 0 \le z \le 3$
$\Big\} \to$ D sono limitati $\overset{W}{\Downarrow}$ $\exists$ max/min f

Questo esercizio proprio no, fatto con i moltiplicatori non ha senso: o ragioni su insieme e funzione oppure devi usare la parametrizzazione del bordo e visto che è un parallelepipedo…!

PUNTI DI TAGLIO
Non ce ne sono

PUNTI SINGOLARI non ci sono

MOLTIPLICATORI

$$\begin{cases} y+z = \lambda \\ x+z = \lambda \\ y+x = \lambda \\ (x,y,z) \in D \end{cases}$$

$y+z = x+z$ allora $\to y = x$

$2x = \lambda$

$x+z = 2x$

$x = z$

$(1,1,1) \to f = 3$ $\quad$ $f = 6$ sup.

$(0,0,0) \to f = 0$ inf

• $xy+z = f(x,y,z)$

Mancano i punti stazionari interni

$D = \{ x^2+y^2+z^2 \le 1 \} \to$ è la sfera $\Rightarrow$ è limitata allora $\overset{W}{\Rightarrow} \exists$ max/min

PUNTI DI TAGLIO: non ce ne sono

PUNTI SINGOLARI: $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \\ (x,y) \in D \end{cases} \Rightarrow$ non ci sono

MOLTIPLICATORI

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 \le 1 \end{cases} \to \begin{cases} y-(x) = 2\lambda(x-y) \\ x = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 \le 1 \end{cases}$$

se $x = y$

$y(2\lambda-1) = 0 \to y = 0$

no soluzioni

$2\lambda = 1 \to z = 1$

$\underbrace{(0,0,1)}_{max} \to f = 1$

se $2\lambda = -1$

$x = -y$

$z = -1$

$2x^2 + x = x$

$x = 0$

$\underbrace{(0,0,-1)}_{min}$ min

• $f(x,y,z) = x - y + 3z^2$

$D = \{ (x^2+y^2+z^2 \le 1) \} \to$ è la sfera chiusa è limitato $\overset{W}{\Rightarrow} \exists$ max/min

PUNTI DI TAGLIO → non ci sono

PUNTI SINGOLARI:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 6z = 0 \\ (x,y) \in D \end{cases}$$

Anche qui mancano i punti stazionari interni

MOLTIPLICATORI

n.b. se presuppone due casi, meglio dire: dato che necessariamente x diverso da 0 ….

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ 6z = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow$$

se $x \neq 0$

$2\lambda = 1/x \to y = -x$

$2x = z \to z \neq 0$ $\quad z = 0 \to 2x^2 = 1 \quad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Mi pare sia sparito un 6

$2\lambda = 6$

$x = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + z^2 = 1$

$z^2 = \frac{17}{18}$ } 2 punti di max

$f(\text{nel punto}) = \frac{19}{6}$

$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

2 punti di minimo

$f = -\sqrt{2}$

• $f(x,y,z) = y + z - x^2$

$D = \{ x^2+y^2 \le z \le 1 \} \to$ è limitato $\quad |x| \le 1 \quad |y| \le 1 \quad |z| \le 1 \quad \underset{W}{\Rightarrow} \exists$ max/min

Qui mancano gli stazionari interni

così come spiegazione non è chiara: devi osservare che 0<= z <= 1 e da questo dedurre le stime su x e y

PUNTI DI TAGLIO

$z = 1 \Rightarrow D = \{ \overbrace{x^2+y^2}^{g} \le 1 \} \to$ è limitato $\underset{W}{\Rightarrow} \exists$ max e min

$f(x,y,1) = y + 1 - x^2$

→ punti staz. interni $\nabla f = (1, 0, -2x) \neq (0,0,0)$ non ci sono

La prima coordinata deve sempre essere la derivata rispetto a x

- BORDO → no punti di taglio

→ punti singolari del bordo $\vec{\nabla} g = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$ NO SOLUZIONI

Moltiplicatori

$$\begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

se $x = 0$

$y^2 = 1$

$(0, 1, 1) \leftarrow$ Max $f = 2$

$(0, -1, 1)$

se $x \neq 0 \to \lambda = -1$

$y = -1/2$

$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots\right)$

x qui come lo ricavi? ? Se non riporti i conti…

• Per $z \neq 1$

Punti singolari

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ -1 = 0 \end{cases}$$ NO SOLUZIONI

MOLTIPLICATORI

$$\begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = -\lambda \\ x^2+y^2 = z \end{cases}$$

se $x = 0$ → già visto

Calma, qui z non è 1

$y = -\frac{1}{2}$

MINIMO → $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$ $f = -\frac{1}{4}$