Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. (a) Stabilire se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$xy^2 \leq C(1 + x^4 + y^3), \qquad \forall x \geq 0, \forall y \geq 0,$$

ed in caso affermativo determinare la migliore costante C per cui la diseguaglianza è verificata.

   (b) Stabilire se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|xy^2| \leq C|1 + x^4 + y^3|, \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Sia

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 4,\ |x| \geq 1,\ 1 \leq |y| \leq 2\}.$$

Calcolare

$$\int_V z\, dx\, dy\, dz, \qquad \int_V |z|\, dx\, dy\, dz.$$

3. Sia $Q := [1, +\infty[\times [0, 1]$.

   (a) Stabilire per quali $\alpha > 0$ converge l'integrale

$$\int_Q \frac{\arctan(xy)}{x^\alpha + y^\alpha}\, dx\, dy.$$

   (b) (Bonus) Sia $Q_R := [R, 2R] \times [0, 1]$. Stabilire per quali $\alpha > 0$ la funzione

$$\phi_\alpha(R) := \int_{Q_R} \frac{\arctan(xy)}{x^\alpha + y^\alpha}\, dx\, dy$$

ha massimo in $[1, +\infty[$.

4. Sia $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 - y^4 z^2 + 2z^2 = 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$, orientata prendendo in $(1, 0, 0)$ la normale che punta verso le x negative.

Sia $F(x, y, z) = (xy, -y^2, yz + e^{x^2})$. Calcolare il flusso di F attraverso S.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \sin(x^2y + y^4) + \arctan(x^2y + x^2) - x^2y^2.$$

   (a) Provare che l'origine è un punto stazionario e classificarlo.

   (b) Stabilire se f ammette massimo in $[1,+\infty[\times[1,+\infty[$.

   (c) (Bonus) Determinare sup di f in $\mathbb{R}^2$ precisando se si tratta di massimo.

2. Siano

$$C := \{(x,y,z):\ x^2 + y^2 + z = 1,\ x^2 + z^2 = 3\} \qquad f(x,y,z) = x - z.$$

   Determinare estremo inferiore e superiore di f su C specificando se si tratta di minimo/massimo e in tal caso i corrispondenti punti di minimo/massimo.

3. Sia

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

   Calcolare

$$\int_V |x|\,dx\,dy\,dz \qquad \int_V |x+y|\,dx\,dy\,dz.$$

4. Sia V il solido di $\mathbb{R}^3$ racchiuso dai piani $y = 0$, $y = 1$ e dalla superficie S data in forma parametrica da $(x,y,z) = (\cos t, v, \sin^3 t)$ con $0 \leq v \leq 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Calcolare $\int_V y\,dx\,dy\,dz$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Si consideri per $\alpha \geq 0$ la funzione
$$f_\alpha(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2+x^2y^\alpha}.$$
   (a) Sia $A := [1,+\infty] \times [1,+\infty[$. Stabilire per quali $\alpha \geq 0$ esiste il limite:
$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty,\,(x,y)\in A} f_\alpha(x,y).$$
   (b) (Bonus) Sia $B := [0,+\infty[\times[0,+\infty[$. Stabilire per quali $\alpha \geq 0$ esiste il limite:
$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty,\,(x,y)\in B} f_\alpha(x,y).$$

2. Sia $V := \{(x,y,z) :\ 0 \leq z \leq y \leq x \leq 1\}$. Calcolare
$$\int_V |y-2x|\,dx\,dy\,dz.$$

3. Sia $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \geq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Stabilire per quali $\alpha \geq 0$ converge l' integrale
$$\int_B \frac{\arctan(x+y)}{(x^2+y)^\alpha} dx\,dy.$$

4. Consideriamo la curva del piano $\gamma(t) = (t\sin t, t\cos t)$ con $0 \leq t \leq \pi/4$.
   (a) Stabilire se γ è semplice.
   (b) Determinare le intersezioni tra la curva γ e la retta $y = x$.
   (c) Sia D la regione di piano racchiusa da $\gamma \cup \{y = x\}$. Fare un disegno approssimativo di D.
   (d) Calcolare l'area di D.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Siano

$$C := \{(x, y, z) : \ x^2 + y + z^2 = 3,\ x^2 - z^2 = 1,\ y \geq 0\}, \qquad f(x, y, z) = x - y.$$

   Determinare estremo inferiore e superiore di f su C specificando se si tratta di minimo/massimo e in tal caso i corrispondenti punti di minimo/massimo.

2. Sia $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + (x + y)^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$. Calcolare

$$\int_A |2x + y| \, dx \, dy.$$

3. (a) Sia $Q := [1, +\infty[\times [0, +\infty[$. Stabilire se convergono

$$\int_Q \frac{e^{-x}}{x + \sqrt{y}} dx \, dy, \qquad \int_Q \frac{e^{-xy}}{x + \sqrt{y}} dx \, dy.$$

   (b) (Bonus) Per $R > 0$ poniamo $Q_R := [R, 2R] \times [0, R]$. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{R \to +\infty} R^\alpha \int_{Q_R} \frac{e^{-xy}}{x + \sqrt{y}} dx \, dy = 0.$$

4. Sia V il solido di $\mathbb{R}^3$ racchiuso dal piano $x = 2$ e dalla superficie S data in forma parametrica da $(x, y, z) = (u^3 + u, u^2 \cos v, u \sin v)$ con $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Calcolare il volume di V.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Si consideri la funzione
$$f(x,y) = \frac{xy^3}{1+x^2y^4}.$$
   (a) Sia $Q := [1,+\infty[\times[1,2]$. Determinare inf/sup di f in Q specificando se si tratta di minimo/massimo e in tal caso i corrispondenti punti di minimo/massimo.

   (b) Determinare inf/sup di f in $\mathbb{R}^2$.

   (c) (Bonus) Sia B_R la palla di centro l'origine e raggio R e sia $M_R = \sup_{B_R} f(x,y)$. Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{R\to+\infty} R^\alpha M_R.$$

2. Sia $V := \{(x,y,z) :\ 0 \le x \le y \le z \le 1\}$. Calcolare
$$\int_V |2x - y|\, dx\, dy\, dz.$$

3. Sia $S := \{(x,y,z) :\ x + y^2 + z^3 = 4,\ x \ge 0, z \ge 0\}$ orientata prendendo in $(2,1,1)$ la normale che punta verso le y negative. Sia $F(x,y,z) = (y, e^x + \sin^3 z, y^2)$. Calcolare il flusso di F attraverso S.

4. Si consideri per $\alpha \ge 0$ la forma differenziale
$$\omega_\alpha = \frac{1 + xy^2 + x^2y^2}{1+\alpha x^2y^2}dx + \frac{x^2y}{1+\alpha x^2y^2}dy.$$
   Determinare per quali $\alpha \ge 0$ la forma ω_α è esatta ed in tal caso calcolarne la primitiva che vale 1 nell'origine.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Siano $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 = z, \ 0 \le z \le 1\}$ e $f(x,y,z) = x + 2z - y^2$. Determinare inf/sup di f su S precisando se si tratta di minimo/massimo e gli eventuali punti di minimo/massimo.

2. Si consideri la funzione
$$f(x,y) = x^2 - xy^2 + y^4 - 2\arctan(x^2+y^4).$$
   (a) Provare che l'origine è un punto stazionario e classificarlo.
   (b) Stabilire se f ammette massimo e/o minimo su $\mathbb{R}^2$.
   (c) Provare che f ammette almeno tre punti stazionari.
   (d) (Bonus) sia B_ϵ il cerchio di centro l'origine e raggio ϵ e sia $M_\epsilon = \sup_{B_\epsilon} |f(x,y)|$. Calcolare al variare di $\alpha > 0$
$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{M_\epsilon}{\epsilon^\alpha}.$$

3. Sia
$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le xy \le 2, \ 1 \le \frac{y}{x} \le 4, \ x \ge 0\right\}.$$
Sia V_α il solido ottenuto da una rotazione di un angolo α di D intorno all'asse delle x verso le z negative.
   (a) Nel caso $\alpha = 2\pi$ calcolare il volume di V_α.
   (b) Nel caso $\alpha = \pi/4$ calcolare la coordinata z del baricentro di V_α.

4. Consideriamo la curva del piano definita da $\gamma(t) = (t^4 - t^2, t^2 - t)$ con $0 \le t \le 1$.
   (a) Provare che γ è chiusa e semplice e farne un disegno approssimativo.
   (b) Sia D il dominio racchiuso da γ. Calcolare $\int_D y \, dx \, dy$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Siano:

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 + xy \leq 1\}, \qquad f(x, y) = |x - 3y|.$$

Determinare estremo inferiore e superiore di f in D specificando se si tratta di minimo/massimo ed in tal caso i corrispondenti punti di minimo/massimo.

2. Sia $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ \max\{|x|, |y|\} \geq 1\}$. Calcolare

$$\int_V z \, dx \, dy \, dz, \qquad \int_V |z| \, dx \, dy \, dz.$$

3. Sia $B := \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$.

   (a) Provare che
   $$\int_B \frac{1}{x^4 + y^4 + x^2 y^2} dx \, dy = +\infty.$$

   (b) Stabilire per quali $\alpha > 0$ converge
   $$\int_B \frac{1}{x^\alpha + y^4 + x^2 y^2} dx \, dy.$$

   (c) (Bonus) Sia $B_\epsilon := \{(x, y) : \ \epsilon \leq x^2 + y^2 \leq 2\epsilon, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$. Calcolare
   $$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{B_\epsilon} \frac{1}{x^2 + y^4 + x^2 y^2} dx \, dy.$$

4. Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ data in forma parametrica da

$$(x, y, z) = (u + u^2 - v, u - v^2, u + v) \qquad 0 \leq u \leq 2, \ 0 \leq v \leq 2,$$

orientata prendendo in $(1, 0, 2)$ la normale che punta verso le x negative. Sia $F(x, y, z) = (z, z, y)$. Calcolare il flusso di F attraverso S.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.