[B1] Determinare per quali valori del parametro reale a il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + ay = 6 \end{cases}$$

ammette soluzione unica.

Soluzione unica $\Leftrightarrow$ matrice dei coeff. invertibile

$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & a \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - 8 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a \neq 8}$

[B2] Determinare la forma canonica di Jordan della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango $= 2$

Quindi l'autovalore $\lambda = 1$ ha molt. alg. $= 3$ e molt. geom. $= 1$

Ne segue che la forma di Jordan è

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

— o — o —

[L1] Determinare l'espressione analitica della trasformazione che rappresenta, nello spazio, la simmetria rispetto al piano di equazione $x + 2z = 0$.

Base del piano : $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (2, 0, -1)$

Vettore perpendicolare ad entrambi $v_3 = (1, 0, 2)$

(a, b, c) del piano

La simmetria richiesta manda

$v_1 \longrightarrow v_1$ $\qquad$ $v_2 \longrightarrow v_2$ $\qquad$ $v_3 \longrightarrow -v_3$

quindi è rappresentata da

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

si calcola facilmente essendo l'inversa di una matrice con colonne ortogonali

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

(Verificare qualcosa !)

Più compattamente

$$\boxed{(x, y, z) \longrightarrow \frac{1}{5}(3x - 4z,\ y,\ -4x - 3z)}$$

— o — o —

[L2] Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = y^2 - z^2 + 2xy.$$

(a) Determinare un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione massima su cui $q(x, y, z)$ risulta definita positiva.

(b) Determinare un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione massima su cui $q(x, y, z)$ risulta definita negativa.

Completiamo i quadrati:

$$y^2 - z^2 + 2xy = y^2 - z^2 + 2xy + x^2 - x^2 = (x+y)^2 - x^2 - z^2$$

Quindi la segnatura è $(n_+, n_-, n_0) = (1, 2, 0)$

(a) $\boxed{\mathrm{Span}\{(0,1,0)\}}$ (Risolvo $x = z = 0$)

(b) $\boxed{\mathrm{Span}\{(1,-1,0), (0,0,1)\}}$ (Risolvo $x+y = 0$)

— o — o —