Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Sia $f(x,y) = |3x^2 - 2y^4|$ e sia D definito da:
$$D := \{(x,y) : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}.$$
Determinare estremo inferiore e superiore di f in D specificando se si tratta di massimo e/o minimo e gli eventuali corrispondenti punti di massimo/minimo.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = \frac{x^2y^3 + \sin(x^2y)}{1 + x^4 + |y|^7}.$$
   (a) Provare che l'origine è un punto stazionario e classificarlo.
   (b) Stabilire se f ammette massimo e/o minimo su $\mathbb{R}^2$.
   (c) Provare che f ammette almeno 5 punti stazionari.
   (d) (Bonus) Sia $Q_R = [R, +\infty[\times[R, +\infty[$ e sia $M(R) = \sup_{Q_R} f(x,y)$. Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{R\to+\infty} R^\alpha M(R).$$

3. Sia $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + z^2 \geq 1\}$. Calcolare
$$\int_V |y|\, dx\, dy\, dz.$$

4. Sia $F(x,y,z) = (x + y, x^2, z)$ e sia
$$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 + y^2z^2 = 7,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$
orientata prendendo in $(2,1,1)$ la normale che punta verso le y negative. Calcolare il flusso del rotore di F attraverso S.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Siano
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + x^2 z^2 = 1, \, x \geq 0\}, \quad f(x,y,z) = x + y - z^2.$$
Determinare $\inf_S f$ e $\sup_S f$ precisando se si tratta di minimo/massimo e gli eventuali corrispondenti punti di minimo/massimo.

2. Sia $Q := [1, +\infty[\times [1, +\infty[$.
   (a) Stabilire se convergono:
   $$\int_Q \frac{\arctan(xy)}{x^2 + y^2} \, dx \, dy, \qquad \int_Q \frac{\arctan(xy)}{x^2 + y^4} dx \, dy.$$
   (b) (Bonus) Sia $Q_n = [n, 2n] \times [n, 2n]$. Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:
   $$\lim_{n \to +\infty} n^\alpha \int_{Q_n} \frac{\arctan(xy)}{x^2 + y^4} dx \, dy.$$

3. Sia T il triangolo del piano xy di vertici $(1,0)$, $(2,0)$ e $(3,2)$ sia V il solido ottenuto da una rotazione completa di T intorno all'asse y. Calcolare il volume e le coordinate del baricentro di V.

4. Sia γ la curva del piano (x,y) definita da $\gamma(t) = (t^2 - 2t^3, t - t^2)$, con $0 \leq t \leq 3/2$.
   (a) Determinare se γ è semplice e farne un disegno approssimativo.
   (b) Determinare le intersezioni tra γ e la retta $6y = x$.
   (c) Sia D la regione di piano racchiusa da $\gamma \cup \{6y = x\}$. Calcolare l'area di D.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Sia $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ e poniamo
$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ x + z = 1,\ |y| \leq 2\}.$$
Determinare $\inf_C f$ e $\sup_C f$ specificando se si tratta di minimo/massimo e gli eventuali corrispondenti punti di minimo/massimo.

2. Per $\alpha \geq 0$ sia $f_\alpha(x, y) = 2x^4 - \alpha x^2 y^2 + y^4$.
   (a) Stabilire per quali α esiste
   $$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f_\alpha(x, y).$$
   (b) Provare che per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha: $|x^3 y| \leq f_0(x, y)$.
   (c) Stabilire per quali α esiste una costante ottimale M_α tale che per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
   $$|x^3 y| \leq M_\alpha |f_\alpha(x, y)|.$$
   (d) (Bonus) Sia $\alpha_0 := \sup\{\alpha : \text{ esiste } M_\alpha\}$. Calcolare
   $$\lim_{\alpha \to \alpha_0^-} (\alpha_0 - \alpha) M_\alpha.$$

3. Sia B la sfera di $\mathbb{R}^3$ di centro $(1, 0, 2)$ e raggio 2. Calcolare
$$\int_B |x| \, dx \, dy \, dz.$$

4. Si consideri per $\alpha \in \mathbb{R}$ la forma differenziale
$$\omega_\alpha = e^{\alpha xy}(xy + y^2 + 1)dx + e^{\alpha xy}(x^2 + xy + 1)dy + dz$$
e sia $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin t, \cos t)$ con $0 \leq t \leq \pi$.
Calcolare per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$
$$\int_\gamma \omega_\alpha.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Per $\alpha > 0$ consideriamo la funzione
$$f_\alpha(x,y) = \frac{xy^\alpha}{1+x^2+x^2y^2}.$$
   (a) Sia $R := [1,+\infty[\times[1,+\infty[$. Stabilire per quali $\alpha > 0$ esiste (e in caso affermativo calcolare)
$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty,(x,y)\in R} f_\alpha(x,y).$$
   (b) Stabilire per quali $\alpha > 0$ esiste
$$\max_{(x,y)\in R} f_\alpha(x,y).$$
   (c) (Bonus) Sia $R_1 := [0,+\infty[\times[0,+\infty[$. Stabilire per quali $\alpha > 0$ esiste
$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty,(x,y)\in R_1} f_\alpha(x,y).$$

2. Sia $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 4,\ x^2+z^2 = 1\}$. Sia $f(x,y,z) = |x-y+z|$. Determinare estremo inferiore e superiore di f su C, specificando se si tratta di minimo/massimo e i corrispondenti punti di minimo/massimo.

3. Sia $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x+y \le 2,\ 2 \le x-y \le 4\}$. Sia V il solido ottenuto da una rotazione di D di 2π intorno all'asse delle y. Calcolare il volume di V e le coordinate del suo baricentro.

4. Sia γ la curva del piano (x,y) definita da $\gamma(t) = (t^2, t-t^2)$, con $-1 \le t \le 1$.
   (a) Determinare se γ è semplice e farne un disegno approssimativo.
   (b) Sia D la regione di piano racchiusa da $\gamma \cup \{x=1\}$. Calcolare $\int_D x\,dx\,dy$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Sia
$$f(x,y) = (x+y)^2 - x^4 - y^4 - \log(1+(x+y)^2).$$
   (a) Determinare i punti stazionari di f e classificarli.
   (b) Determinare estremo inferiore e superiore di f su $\mathbb{R}^2$ specificando se si tratta di minimo e/o massimo e gli eventuali corrispondenti punti di minimo/massimo.

2. Sia $V := \{(x,y,z) : x+y+z \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$. Calcolare
$$\int_V (y-z)\,dx\,dy\,dz, \qquad \int_V |y-z|\,dx\,dy\,dz.$$

3. Siano $Q = [1,+\infty[\times[1,+\infty[$ e $R = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$. Stabilire se convergono
$$\int_Q \frac{\arctan(xy)}{x^2+x^2y^2+1}dx\,dy, \qquad \int_R \frac{\arctan(xy)}{x^2+x^2y^2+1}dx\,dy.$$
   (Bonus) Sia $Q_r = [r,2r[\times[r,2r[$. Calcolare al variare di $\alpha > 0$
$$\lim_{r\to+\infty} r^\alpha \int_{Q_r} \frac{\arctan(xy)}{x^2+x^2y^2+1}dx\,dy.$$

4. Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ definita in forma parametrica da
$$(x,y,z) = (\cos u \cos v, u-v, u), \qquad -\pi \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq \pi,$$
   orientata prendendo nel punto $(0,0,\pi/2)$ la normale che punta vero le x negative. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$F(x,y,z) = (-3x+y^2, 2y, z).$$
   Calcolare il flusso di F attraverso S.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Si considerino per $\alpha > 0$:
$$D_\alpha := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \geq 1, y \geq 0, \, xy^\alpha \leq 1\} \qquad \text{e} \qquad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x+y^4}.$$
   (a) Fare un disegno approssimativo di D_α e determinare per quali $\alpha > 0$ esiste $\max_{D_\alpha} f$.

   (b) (Bonus) Sia $\alpha = 4$. Provare che esiste una successione $(x_n, y_n) \in D_4$ tale che
$$x_n^2 + y_n^2 \to +\infty, \qquad \text{e} \qquad f(x_n, y_n) = 1.$$
   Calcolare inoltre al variare di $\beta > 0$
$$\lim_{n\to+\infty} x_n y_n^\beta.$$

2. Siano
$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 - y^2 + z^4 = 1, \, |y| \leq 1\}, \qquad f(x,y,z) = xy + z^2$$
   Determinare estremo inferiore/superiore di f in V precisando se si tratta di minimo e/o massimo e gli eventuali corrispondenti punti di minimo/massimo.

3. Sia A l'insieme dei punti del primo quadrante di $\mathbb{R}^2$ interni al cerchio di centro l'origine e raggio 2 ed esterni al triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,0)$.

   Calcolare
$$\int_A y \, dx \, dy, \qquad \int_A y\sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy.$$

4. Si consideri la forma differenziale
$$\omega = (2xye^{x^2y} + \arctan z)dx + x^2e^{x^2y}dy + \frac{x+2z+2z^3}{1+z^2}dz.$$
   (a) Stabilire se ω è esatta ed in caso affermativo determinare la primitiva che vale 1 in $(0,1,1)$.

   (b) Sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin^2 t, t\cos t)$ con $0 \leq t \leq \pi$. Calcolare $\int_\gamma \omega$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Siano

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2-z^2 = 1, \ x+y = 2, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}, \qquad f(x,y,z) = xyz.$$

Determinare estremo inferiore/superiore di f su C precisando se si tratta di minimo e/o massimo e gli eventuali corrispondenti punti di minimo/massimo.

2. (a) Determinare estremo inferiore e superiore su $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^6 - xy^4$$

precisando se si tratta di minimo e/o massimo e gli eventuali corrispondenti punti di minimo/massimo.

(b) Stabilire se esistono $\alpha > 0$ e una costante $C_\alpha > 0$ tale che

$$x^2 + y^2 \leq C_\alpha |f(x,y)|^\alpha \qquad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(c) (Bonus) Provare che esiste $R_0 > 0$ tale che per $R \geq R_0$ esiste una costante ottimale $C_R > 0$ tale che

$$|x|^3 + |y|^3 \leq C_R |f(x,y)| \qquad \text{se} \quad |x| + |y| \geq R$$

e stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{R \to +\infty} R^\alpha C_R = 0$.

3. Sia $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq y \leq 3x, \ 1 \leq xy \leq 2\}$. Calcolare $\int_D x^2 \, dx \, dy$.

4. Sia

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + x^2 y + y^4 + z^2 = 1, \ y \geq 0, \ z \geq 0\}$$

orientata prendendo nel punto $(0,0,1)$ la normale che punta verso le z positive. Sia

$$F(x,y,z) = (x, -y+z, x).$$

Calcolare il flusso di F attraverso S.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.