Esercizi per il Seminario Fisico-Matematico a.a. 1989-90

1) Trovare un insieme A di $\mathbf{R}$ tale che i seguenti 7 sottinsiemi di $\mathbf{R}$ risultino tutti distinti:

$$A \quad \overline{A} \quad \overline{A}^{\circ} \quad \overline{\overline{A}^{\circ}} \quad A^{\circ} \quad \overline{A^{\circ}} \quad \overline{A^{\circ}}^{\circ}$$

e dimostrare che non se ne possono creare altri proseguendo nella stessa maniera. ($\overline{A}$ indica la chiusura di A e A° la parte interna di A).

2) Mostrare che ogni successione di numeri reali ammette una sottosuccessione monotona.

3) Dire se le seguenti funzioni risultano norme in $\mathbf{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|; \quad \max_{i=1,2,\cdots,n} |x_i|; \quad \min_{i=1,2,\cdots,n} |x_i|; \quad \max_{i=1,2,\cdots,n} {x_i}^2; \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \max_{i=1,2,\cdots,n} |x_i|.$$

4) Dire se sono vere o false le seguenti relazioni:

$$\partial A = \partial(CA); \quad \partial A = \partial(\overline{A}); \quad \partial A = \overline{\partial A}.$$

5) Se $x, y \in \mathbf{R}^n$,mostrare che

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$$

ove $|a|$ indica la norma euclidea del vettore a.

6) Una funzione $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ che trasforma ogni x_n convergente in una successione convergente $f(x_n)$, é necessariamente continua?

7) Dire quali sono i possibili limiti delle sottosuccessioni convergenti della succesione formata dalle parti frazionarie della radice quadrata di n (per parte frazionaria di un numero reale a si intende quel numero reale x nell' intervallo $[0,1)$ tale che, aggiunto alla parte intera di a, dia a stesso).

8) Trovare le possibili implicazioni esistenti tra le seguenti proposizioni (x_n indica una successione in $\mathbf{R}$):
a) x_n é convergente.
b) $(\sum_{i=1}^{n} x_i)/n$ é convergente.
c) x_n^3 é convergente
d) $f(x_n)$ é convergente per ogni f continua da $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

9) Sia x_n la successione definita nel seguente modo:

$$x_0 = a, \quad x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}}$$

Dire per quali valori di a la successione é convergente e calcolare l' eventuale limite.

10) Dire quali dei seguenti sottinsiemi di $\mathbf{R}^n$ sono convessi:

$$A = \{(x,y) \mid y > x^2\}, \qquad B = \{(x,y) \mid |x| + |y| \le 1\},$$
$$C = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |(x, e_1)| \ge \frac{|x|}{2}\}.$$

11) Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ porta intervalli in intervalli, si puó concludere che f é continua?

12) Dimostrare la validitá dei seguenti limiti importanti, per $x \to 0$:

$$\frac{\sin x}{x}\ (= 1); \quad \frac{1 - \cos x}{x^2}\ (= 1/2); \quad \frac{\ln(1+x)}{x}\ (= 1);$$
$$\frac{e^x - 1}{x}\ (= 1); \quad \frac{(1+x)^a - 1}{x}\ (= a).$$

13) Sfruttando eventualmente i limiti dell' esercizio precedente, calcolare i limiti delle seguenti funzioni per $x \to 0$:

$$\frac{e^{\sin x} - 1}{\ln(x+1)}; \quad \frac{\ln \cos x}{x \sin x}; \quad \frac{\tan x}{\sqrt{x^2 + x^3}}; \quad (e^x + 10^x)^{1/x}; \quad (\cos x)^{1/x}.$$

e delle seguenti successioni (per $n \to \infty$):

$$\sqrt{n^2 + an} - n; \quad (1 - 1/n^2)^{n^3}; \quad \frac{n!}{n^n}.$$

14) Dire quali delle implicazioni valgono tra le seguenti proposizioni, dove $a_n, b_n \to \infty$:
a) $\frac{a_n}{b_n} \to 1$
b) $\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} \to 1$
c) $\frac{\ln a_n}{\ln b_n} \to 1$
d) $\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}}$ é limitata.
Discutere lo stesso esercizio nel caso in cui a_n, b_n siano successioni strettamente positive ed infinitesime.

15) Sia f Lipschitziana continua in $[0,1]$. Mostrare che esiste $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1} f(i/n)}{n}$ e mostrare che se fé positiva e decrescente, allora la successione $\frac{\sum_{i=0}^{2^n-1} f(i/2^n)}{2^n}$ é decrescente, mentre la successione $\frac{\sum_{i=1}^{2^n} f(i/2^n)}{2^n}$ é crescente, ed entrambe convergono allo stesso limite.

16) Mostrare che convergono le seguenti successioni:

a) $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \cdots$

b) $\begin{cases} a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \\ b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \end{cases}$ con $a_1, b_1 > 0$, e mostrare inoltre che $\lim a_n = \lim b_n$. (Tale limite é la cosiddetta media "aritmo-geometrica" di a_1, b_1.)

17) Sia x_n una successione definita per ricorrenza nel seguente modo :

$$\begin{cases} x_n = 4x_{n-1} + x_{n-2} & \text{se } n > 1 \\ x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \end{cases}.$$

Trovare $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$.

18) Trovare un polinomio in due variabili con coefficienti in $\mathbf{N}$ tale che come funzione da $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$ risulti iniettiva. (E quindi puó costituire una dimostrazione della numerabilitá di $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$).

19) Un microbo si divide in due microbi perfettamente uguali a sé o si estingue. Se la probabilitá di dimezzarsi é p, qual è la probabilitá che un microbo siffatto dia origine ad una colonia che non si estingue?
(Se p_n é la probabilitá che la colonia duri almeno n generazioni, provare che $p_{n+1} = p(1-(1-p_n)^2)$ e si cerchi $\lim_{n\to\infty} p_n$).

20) Sia x_n una successione di numeri reali tale che $x_n - x_{n-2} \to 0$. Mostrare che

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{n} \to 0$$

21) Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una norma in $\mathbf{R}^n$. Mostrare che l'insieme $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \leq 1\}$ è un insieme convesso, chiuso, simmetrico rispetto all'origine e "assorbente" (questo significa che per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che εx appartiene all'insieme stesso). Viceversa mostrare che ogni insieme che goda delle precedenti 4 proprietá coincide con la palla unitaria di qualche norma in $\mathbf{R}^n$.

22) Una funzione (da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^k$) si dice Lipschitziana con costante di Lipschitz C se per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ si ha $\|f(x)-f(y)\| \leq C\|x-y\|$. Se f, g sono lipschitziane con costante C, dire quali delle seguenti funzioni sono ancora lipscitziane (e precisare le relative costanti)

$$f+g, max(f,g), \frac{f}{g}, f\times g$$

Esercizi

23. Siano ϕ, ψ convesse da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Se una delle due é monotona crescente, si puó garantire che la composizione é convessa?

24. Sia $\phi : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$. Dire quale affermazione é corretta:
a) ϕ convessa implica che $\ln \phi$ é convessa
b) $\ln \phi$ convessa implica che ϕ é convessa

25. Se ϕ é convessa nell' intervallo (a, b) allora risulta lipschitziana in ogni sottointervallo $[c, d]$ chiuso e limitato di (a, b).

26. a) Mostrare che esiste una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che per ogni $a > 0$ valga $\lim_{n\to\infty} f(na) = 0$, mentre non esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
b)* Sempre relativamente alla parte a), cosa si puó concludere se f é continua? (Puó essere utile sfruttare il seguente teorema di Baire: se una infinitá numerabile di chiusi ha come unione $\mathbf{R}$ allora almeno uno di essi ha parte interna non vuota).

27. Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é convessa, mostrare che:

$$f(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i) \le \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(x_i)$$

con $\lambda_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

28. Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ continua e verifichi questa proprietá: per ogni intervallo chiuso J contenuto in (a, b) esista un punto $\overline{x} \in J$ tale che $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ giace sotto la corda passante per i punti corrispondenti agli estremi di J. Mostrare che f é convessa in (a, b). In particolare se $f(\frac{x+y}{2}) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$ allora f é convessa (purché f sia continua: si potrebbe dimostrare che senza questa ipotesi la convessitá non é piú garantita).

29. (Disuguaglianza di Cauchy- Schwarz). a) Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$ allora

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)}$$

e vale l' uguaglianza solo se $y_i = kx_i$ con $k \ge 0$ e indipendente da i.
b) Verificare la identitá di Lagrange:

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 = \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

30. (Media aritmetica-geometrica). Se $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$ allora

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 \cdots x_n}{n}$$

e vale l' uguaglianza sole se x_i é costante rispetto i.

31. Sia f continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che esista la funzione inversa f^{-1} e sia $f = f^{-1}$. Mostrare che esiste almeno un punto fisso per f (cioè l'equazione $f(x) = x$ ha almeno una soluzione).
Se inoltre f è crescente, allora tutti i punti sono fissi per f, cio è f è la funzione identità.

32. Se C è un insieme chiuso e convesso di $\mathbf{R}^n$, è ben definita l'applicazione che associa ad un punto di $\mathbf{R}^n$ il punto di C ad esso piú vicino. Mostrare che tale applicazione è 1−Lipschitziana.

33. Sia a_n una successione di numeri reali positivi tale che

$$a_n < \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}.$$

Dimostrare che a_n converge.

34. Trovare il minimo di queste funzioni della variabile x:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - x)^2, \quad \sum_{i=1}^{n} |a_i - x|, \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |a_i - x|.$$

35. Se f è convessa definita in tutto $\mathbf{R}^n$ allora per ogni x esiste il limite di $\frac{f(tx)}{t}$ per $t \to +\infty$.

36. Mostrare che una funzione convessa definita in tutto $\mathbf{R}^n$ è necessariamente continua.

37. Una funzione Lipschitziana definita in un sottinsieme di $\mathbf{R}^n$ ammette sempre una estensione Lipshitziana a tutto $\mathbf{R}^n$?

38. Date le successioni così definite

$$a_1 = 2 \quad b_1 = 3 \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 5b_n}{6}$$

si determini a_n e b_n in funzione di n.

39. Un baco, lento ma tenace, parte da una estremità di un nastro di gomma lungo un metro e avanza verso l'altra estremità alla velocità di 10 centimetri al minuto. Ad ogni minuto peró uno spirito maligno allunga il nastro di 1 metro. Così alla fine del primo minuto il baco è a 10 centimetri dal punto di partenza e a 90 da quello di arrivo, ma siccome è passato un minuto il nastro viene allungato di un metro, il baco mantiene la sua posizione relativa durante l'allungamento, cioè rimane a 10% dalla partenza e 90% dall'arrivo e dunque dopo il primo minuto si trova a 20 centimetri dalla partenza e a 180

$x_{n+1} = (x_n + l_0)\frac{n+2}{n+1}$.

dall'arrivo. Riuscirá mai il baco a raggiungere la meta? (Ovviamente si suppone che il nastro possa allungarsi all'infinito e che infinite siano sia la longività del baco sia la perversità dello spirito maligno).

40. Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza, determinanone, se esiste, il limite al variare del parametro α

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + a_n^2;$$

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = a_n - a_n^3;$$

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = 1 - a_n + a_n^2;$$

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n};$$

$$a_1 = 1, a_2 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}.$$

41. Mostrare che la successione definita da

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$$

diverge a $+\infty$ e valutarne l'ordine di crescita.

42. $x_n + px_{n-1}$ converge se e solo se x_n converge. Dire per quali valori del parametro p tale affermazione è corretta.

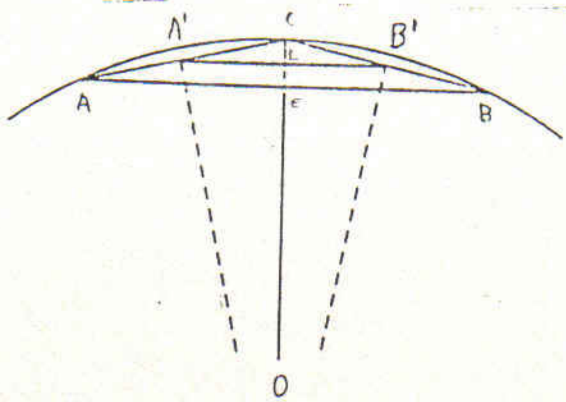
43. Sia P_n un poligono regolare di 2^n lati avente perimetro 2. Siano r_n e R_n i raggi dei cerchi rispettivamente inscritto e circoscritto a P_n. Ovviamente si ha $2\pi r_n < 2 < 2\pi R_n$, da cui

$$r_n < \frac{1}{\pi} < R_n.$$

Usufruendo della seguente figura (ove $A'B' = \frac{1}{2}AB$), si provi che

$$r_{n+1} = \frac{r_n + R_n}{2}, \quad R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}$$

per $n \geq 2$. Si deduca che le due successioni r_n, R_n convergono allo stesso limite $\frac{1}{\pi}$.



$OL = R_{n+1}$
$OC = R_n$
$OL = R_{n+1}$
$OE = r_{n}$

Esercizi

44) Dimostrare la seguente identità di Catalan

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots-\frac{1}{2n}.$$

45) Calcolare

$$s_n=1+4x+9x^2+\cdots+n^2x^{n-1}.$$

46) Siano $a_0,a_1,\ldots,a_n,b_0,b_1,\ldots,b_{n+1}$ dei numeri assegnati e sia $s_k=a_0+a_1+\ldots+a_k$. Si dimostri la identità di Abel:

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=s_nb_{n+1}-s_0b_1+\sum_{k=1}^{n}s_k(b_k-b_{k+1}).$$

47) Verificare che si ha:

(a)
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k=n2^{n-1}$$

(b)
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2=n(n+1)2^{n-2}.$$

48) Mediante la nozione di serie, provare il seguente familiare risultato: sia x un numero decimale periodico misto (ad es. $x=6.34585858\ldots$). Allorta x è uguale alla frazione il cui numeratore è la differenza fra il numero ottenuto scrivendo le cifre della parte intera, dell'antiperiodo e del periodo, e quello formato dalle cifre della parte intera e dell'antiperiodo, mentre il denominatore è costituito da tanti 9 quante sono le cifre del periodo e da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo (nell'esempio di sopra: $x=\frac{63458-634}{9900}$).

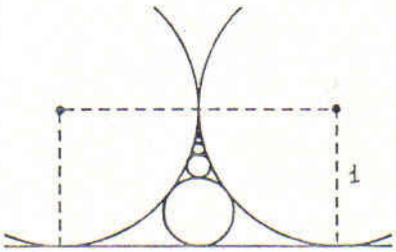
49) Provare che le seguenti serie sono convergenti e calcolarne la somma

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1};\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}};\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2};$$

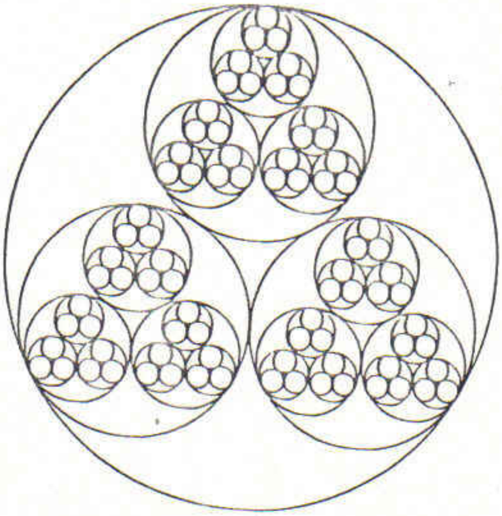
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}.$$

50) Nella seguente figura i due cerchi piú grandi hanno raggio unitario; mostrare che i diametri degli altri cerchi sono della forma $\frac{1}{n(n+1)}$ ottenendo cosí una interpretazione della formula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$



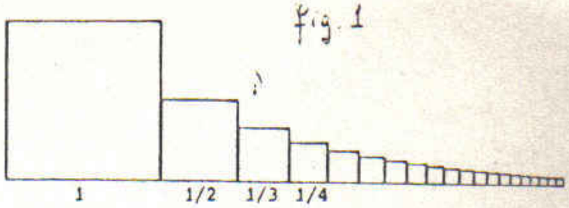
51) In un cerchio di raggio unitario si tracciano tre cerchi uguali mutuamente tangenti e di diametro massimo, e la parte di cerchio esterna ad essi viene colorata. In ciascuno dei tre cerchietti si tracciano altri tre cerchietti come sopra e si colora la parte esterna a questi. Dopo aver ripetuto questa procedura indefinitamente, si determini l'area totale della regione colorata.



52) Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Provare che se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

fig. 1

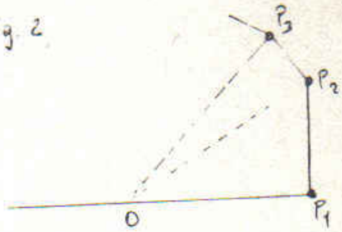


è convergente, allora gli a_n sono tutti nulli.

53) Si costruisca la spezzata $P_1P_2\cdots P_n\cdots$ ove $OP_1 = 1, P_nP_{n+1} = \frac{1}{n+1}, n = 1, 2, \ldots$ e gli angoli $O\hat{P}_nP_{n+1}$ sono tutti retti e orientati tutti nello stesso verso. Si dica se le distanze del punto P_n dall'origine si mantengono limitate al crescere di n e se gli angoli $P_1\hat{O}P_n$ crescono indefinitamente o meno. (Fig. 2)

54) Consideriamo una successione di quadrati disgiunti di lato $\frac{1}{n}$, $n = 2, 3\cdots$. Si dimostri che è possibile inscatolare tutti tali quadrati dentro il quadrato di lato 1 senza sovrapporli né tagliarli. È possibile ripetere lo stesso procedimento nel caso di triangoli equilateri? (Fig. 1)

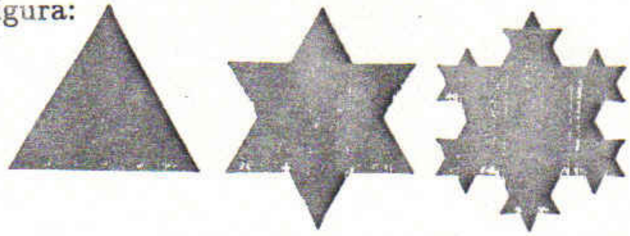
fig. 2



55) Sia h un intero positivo fissato. Provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+h)} = \frac{1}{hh!}.$$

56) (Curva di Von Koch). Partendo da un triangolo equilatero di lato unitario, si divida in tre parti uguali ciascun lato e sulla parte mediana si costruisca un "promontorio", sempre a forma di un triangolo equilatero. si ripeta la costruzione per ciascuno dei lati della nuova figura:



Iterando indefinitamente il procedimento si genera una curva chiusa, detta curva di von Koch. Si verifichi che la "lunghezza" di tale curva è infinita e si calcoli l'area da essa delimitata.

57) Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente con $a_{n+1} \leq a_n$. Si provi la successione na_n è infinitesima. (Osservare che da questo si puó dedurre che la serie armonica è divergente).

58) Sia a_n una successione infinitesima e decrescente. Provare che se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ lo è, e le due serie hanno la stessa somma.

59) Provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ove i termini a_n sono definiti ricorsivamente da

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n}$$

è convergente. Provare invece che l'analoga serie definita da

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$$

è divergente.

60) (Criterio di Raabe). Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Si provi che se esiste un numero $k > 1$ tale che

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq k$$

per ogni n, allora la serie è convergente, mentre se si verifica che

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1$$

per ogni n allora la serie è divergente.

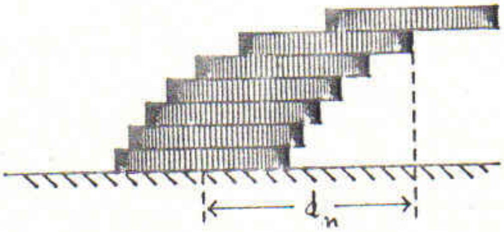
61) Si utilizzi il criterio di Raabe per lo studio della convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$$

con $a > 0$ e di

$$(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6})^2 + \cdots + (\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)})^2 + \cdots$$

62) Su un tavolo orrizzontale vi è una pila di n monete uguali; assumeremo come unitá di misura il loro raggio. Provare che è possibile disporre le monete nella pila in modo che essa sia in equilibrio e che la distanza d_n fra le verticali per il centro della moneta piú bassa e di quella piú alta sia $d_n = 1 + \frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{n-1}$.



63) Siano $n_1, n_2, n_3, \ldots$ gli interi positivi nella cui rappresentazione non compare la cifra 0. Mostrare che la serie dei loro reciproci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ converge ed ha somma minore di 90.

72) (Teorema di Goldbach). Sia P l'insieme di tutte le potenze perfette dei naturali: $4, 8, 9, 16, 25, 27, \ldots$. Si provi che la serie $\sum_{n \in P} \frac{1}{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \cdots$ è convergente ed ha somma 1.

73) Mostrare che le serie

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}, \quad \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log \log n}}$$

sono una convergente e l' altra divergente.

74) $\{a_n\}$ sia una successione in $[0,1)$ con $a_1 > 0$. Mostrare che se $S_n = \sum_1^n a_i$ e $T_n = \sum_{i=1}^n S_i$ allora $\sum_1^\infty a_n / T_n$ converge.

75) Se $\sum a_n$ è convergente allora $a_n \to 0$ e le somme parziali di a_n sono limitate. Dire se vale anche il viceversa.

76) $\sum a_n$ sia assolutamente convergente e abbia somma A, $\sum b_n$ sia convergente con somma B. Allora la serie prodotto, il cui termine generale è $c_n = \sum_0^n a_k b_{n-k}$ è convergente con somma AB.

77) Mostrare che la serie $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n / \sqrt{n+1}$ converge peró il prodotto della stessa serie con se stessa non converge.

78) (Continuitá della somma di una serie di potenze). $\sum c_n$ converga ed abbia somma C. $f(x)$ sia la somma della serie $\sum c_n x^n$ per $x \in (-1,1)$. Allora $f(x)$ converge a C per $x \to 1^-$. Come conseguenza dimostrare che se $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$ e se $\sum c_n = C$ dove $\sum c_n$ è la serie prodotto, allora $C = AB$.

79) Se $\sum_i \sum_j |a_{i,j}| < \infty$ allora $\sum_i \sum_j a_{i,j} = \sum_j \sum_i a_{i,j}$.

80) Dare un esempio di una serie a due indici tale che

$$\sum_i \sum_j a_{i,j} \neq \sum_j \sum_i a_{i,j}$$

(nel senso che entrambe convergano peró abbiano somme diverse).

81) $\sum 1/p = \infty$ (p indica il generico numero primo). (Eventualmente sfruttare il fatto che se $\{p_n\}$ indica la successione dei numeri primi, allora $p_n/(n \log n)$ tende a 1).

ESERCIZI

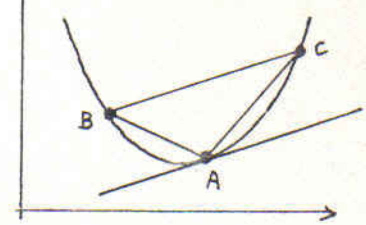
82) Trovare un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che

$$P(0) = 1 \ , \quad P(1) = 0 \ , \quad P'(0) = P'(1) \ , \quad P''(0) = 4 .$$

83) Trovare tutte le rette tangenti alla curva di equazione $y = 3x^3 - 14x^2 + 2x - 8$ che passano per l'origine.

84) Determinare l'angolo formato dalle tangenti alle curve di equazione $y = 1 + \ln x$ e $y = \frac{1}{x}$ nel loro punto di intersezione.

85) Si consideri una parabola con asse parallelo all'asse y. Se P, Q sono punti della parabola si indichino con m_P, M_{PQ} rispettivamente il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola in P e quello della retta per P e Q.

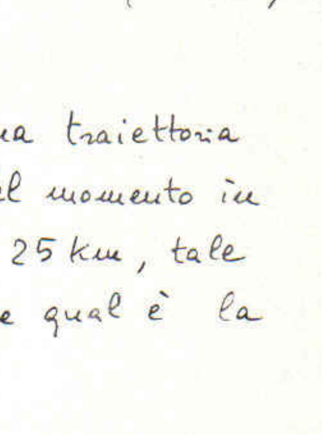


Si provi che, dati comunque tre punti A, B, C sulla parabole, si ha

$$m_A = M_{AC} + M_{AB} - M_{CB} .$$

86) Un aereo sta percorrendo con velocità costante una traiettoria rettilinea che dista 7 Km da un radiofaro. Nel momento in cui la distanza dell'aereo dal radiofaro è di 25 Km, tale distanza aumenta di 180 m al secondo. Dire qual è la velocità in Km/h dell'aereo.

87) Un serbatoio d'acqua ha la forma di un cono circolare retto di altezza 10 m e raggio 5 m. L'acqua esce dal fondo al tasso costante di $1 \, m^3$ al secondo. Determinare la velocità con cui scende il livello del liquido quando l'altezza h è di 6 m.

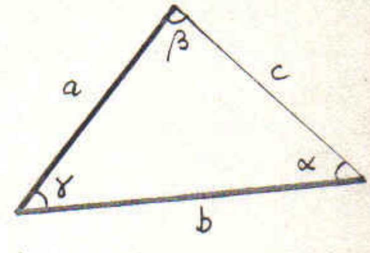


88) In un triangolo i lati a e b sono di lunghezza fissata; detti α, β, γ gli angoli rispettivamente opposti ai lati a, b, c

si provino le seguenti relazioni:

$$\frac{dc}{d\gamma} = a \sin\beta ,$$

$$c\frac{d\alpha}{d\gamma} = -a\cos\beta .$$



89) Provare che

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = \begin{cases} -1 & \text{se } n=1 \\ 0 & \text{se } n>1 . \end{cases}$$

90) Sia $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots + a_n \operatorname{sen} nx$. Sapendo che $|f(x)| \leq |\operatorname{sen} x|$ per ogni x si provi che

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leq 1 .$$

91) Sia $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. Dimostrare che, posto $c_n = f^{(n)}(0)$, vale la relazione ricorrente

$$(n-2)c_n = -2n(n-1)c_{n-2} , \quad n>2 .$$

92) Sia $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$, si determini esplicitamente $f^{(n)}(0)$.

93) Trovare una serie di potenze $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ che risolva l'equazione di Bessel

$$x y'' + y' + xy = 0 .$$

94) Determinare una serie di potenze $y(x) = \sum a_n x^n$ che risolva in un intorno di $x=0$ il problema

$$\begin{cases} y'' + x^2 y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} .$$

95) Verificare che le funzioni (polinomi di Laguerre)

$$y(x) = L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}$$

sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$x y'' + (1-x) y' + n y = 0.$$

Verificare inoltre che risulta

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

96) Sia $y = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$. Si provi che

$$(1-x^2) y'' - x y' - 1 = 0$$

se ne deduca $y^{(2n-1)}(0) = 0$. Si cerchi un'espressione per $y^{(2n)}(0)$.

97) Provare che la funzione $f(x) = x^{50} + ax + b$ ha al più due zeri reali.

98) (Una funzione non analitica). Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

si provi che:

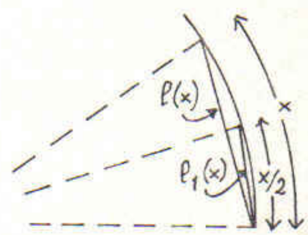
(a) per ogni intero n si ha $\lim_{x \to 0} x^{-n} e^{-1/x^2} = 0$

(b) $f'(0) = 0$

(c) se $x \neq 0$ si ha $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$, ove P_n è un polinomio

(d) $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni n.

99) Sia x la lunghezza di un arco di circonferenza e siano $\ell(x)$ la lunghezza della corda relativa, $\ell_1(x)$ la lunghezza della corda relativa all'arco $\frac{x}{2}$. Si trovino due numeri a, b in modo che

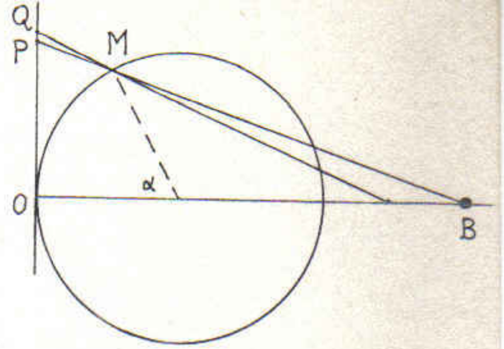


$$x - \left(a\,\ell(x) + b\,\ell_1(x)\right) = O(x^5) \quad \text{per } x \to 0.$$

100) Trovare il massimo valore della costante positiva K per cui si ha

$$K \lg x \leq \sqrt{x} \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

101) Sia M un punto della circonferenza di equazione $(x-1)^2+y^2=1$ tale che $0<\widehat{OM}<\frac{\pi}{2}$ ove O è l'origine. Siano poi $B=(3,0)$ e P l'intersezione della retta per B e M con l'asse y. Si provi che $\overline{OP}=\frac{3\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2+\cos\alpha}$,



ove $\alpha=\widehat{OM}$, se ne deduca che $\overline{OP}$ è una approssimazione di α e che

$$\overline{OP}=\alpha+O(\alpha^5) \quad \text{per} \quad \alpha\to 0^+.$$

Detto ora Q il punto sul semiasse $y>0$ tale che $\overline{OQ}=\widehat{OM}$ e C l'intersezione con l'asse x della retta per Q e per M si verifichi che $\overline{OC}\to\overline{OB}$ per $\alpha\to 0^+$.

102) Usufruendo degli sviluppi in serie determinare a, b, c in modo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(a+b\cos x)-c\,\mathrm{arctg}\,x}{x^5}=1.$$

103) Considerata la parabola di equazione $y=x^2$ determinare una corda perpendicolare in un suo estremo alla tangente alla parabola avente lunghezza minima.

104) Sia $f(x)$ una funzione di classe C^3 tale che

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}=e^3.$$

Calcolare $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

105) Provare che se $0<x<\frac{\pi}{2}$ si ha

$$-\lg\cos x<\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{tg}\,x.$$

106) Determinare le tangenti all'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ che formano con gli assi coordinati un triangolo di area minima.

107) Un tale vuole andare da A a B, essendo A e B punti diametralmente opposti sulla riva di un lago circolare; c'è una barca in A a sua disposizione. Sapendo che la velocità a piedi è u, mentre in barca è v, determinare

il tempo minimo occorrente per il tragitto da A a B.

108) Dai quattro angoli di un rettangolo di lati a, b togliere quattro quadrati uguali, in modo che con ciò che rimane si possa formare una scatola di capacità massima.

109) Sia f una funzione di classe C^1, non identicamente nulla, tale che

$$f'(x) = \operatorname{arctg}(f(x)) \quad , \quad \forall x > 0 .$$

Provare che $\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$

110) Siano x, y due numeri positivi. Si provi che esiste un numero λ, $0 < \lambda < 1$, per cui risulta

$$\lg \frac{x+y}{2} = \frac{x+y-2}{x+y-\lambda(x+y-2)} .$$

111) Sia $f \in C^2$ tale che $|f(x)| \le 1$ per ogni x e $[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 4$.
Si dimostri che esiste un punto c tale che $f(c) + f''(c) = 0$
[Si trovino due punti a, b con $-2 < a < 0 < b < 2$ e $|f'(a)| \le 1$, $|f'(b)| \le 1$; si osservi allora che la funzione $\varphi(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$ ha un minimo interno ad $[a, b]$].

112) Si trovi il massimo α e il minimo β per cui

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \le e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta} \quad \text{per ogni } n .$$

[Si studi la funzione $F(x) = \dfrac{1}{\lg(1+\frac{1}{x})} - x$]

113) Sia $f \in C^2[a, b]$ e sia $S(h)$ il rapporto incrementale simmetrico

$$S(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} ,$$

si verifichi che $\lim_{h \to 0} S(h) = f'(x)$

114) (Algoritmo logaritmo-arcoseno). Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$s_{n+1} = s_n \sqrt{\frac{2 s_n}{s_n + s_{n-1}}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Prendendo come valori iniziali

$$s_{-1} = \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \quad , \quad s_0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \quad , \quad x > 0$$

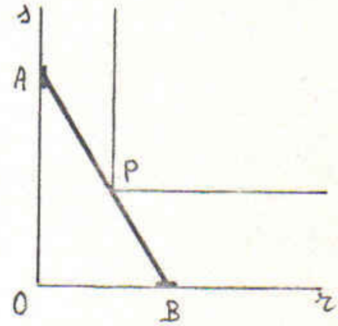
si provi che la successione $\{s_n\}$ converge a $\log x$.
[Posto $S(h) = \frac{1}{2h}\left(x^h - x^{-h}\right)$ si verifichi che $s_n = S(2^{-n})$ e si applichi il risultato del precedente esercizio]

(b) Prendendo invece come valori iniziali

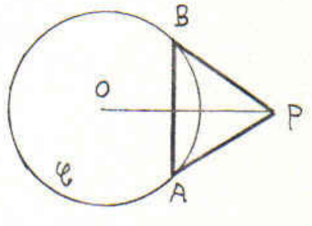
$$s_{-1} = x\sqrt{1-x^2} \quad , \quad s_0 = x \qquad (-1 \le x \le 1)$$

si provi che $\{s_n\}$ converge a $\arcsin x$.
[Posto $a = \arcsin x$ si verifichi che $R(2^{-n}) = s_n$, ove stavolta $R(h) = \frac{\operatorname{sen} ha}{h}, \dots$].

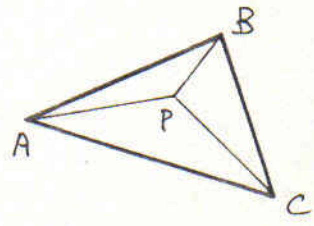
115) Sia P un punto interno a un angolo retto rOs, a distanza a dalla semiretta s e a distanza b dalla semiretta r. Qual è la minima lunghezza di un segmento AB con A su s e B su r?
[Vale a dire: qual è la massima lunghezza di una scala a pioli che può essere trasportata attraverso un cunicolo ad angolo retto come quello raffigurato?]



116) Sia $\mathscr{C}$ una circonferenza di centro O e sia ABP un triangolo equilatero avente i punti A, B su $\mathscr{C}$. Trovare il massimo di $\overline{OP}$.



117) Dato un triangolo ABC determinare un punto P tale che la somma delle sue distanze dai vertici sia minima (il punto P si dice punto di Fermat del triangolo dato).



118) Sia f una funzione derivabile tale che $f(a) = a$, $f(b) = b$.
Provare che esistono due punti distinti $\xi, \eta \in (a,b)$ in modo che

$$\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2 .$$

119) Sia f una funzione di classe $C^1[a,b]$ e si supponga che f abbia $n+1$ zeri distinti in $[a,b]$

(a) Si provi che f' ha almeno n zeri distinti in $[a,b]$.

(b) Si provi che per ogni λ reale la funzione $g(x) = f'(x) - \lambda f(x)$ ha almeno n zeri distinti in $[a,b]$

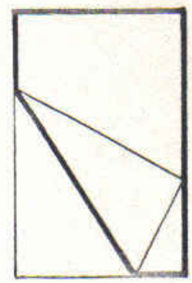
[Si consideri l'identità $f' - \lambda f = e^{\lambda x} D(e^{-\lambda x} f(x))$]

✓ ? 120) Sia f una funzione $C^2(0,2)$ tale che

$$|f(x)| \leq 1 \quad , \quad |f''(x)| \leq 1 \quad \text{per ogni } x \in [0,2].$$

Si provi che $|f'(x)| \leq 2$ per ogni $x \in [0,2]$.

121) Un foglio di carta rettangolare di cm. 20×30 viene piegato in modo che un vertice vada a toccare un lato opposto. Come si deve fare affinché la lunghezza della piegatura sia massima?



122) Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e per ogni n si ha $a_n \geq 0$ allora l'epigrafico $\{(x,y) ;\ y \geq f(x)\}$ risulta ovviamente convesso. Provare che tale epigrafico rimane convesso anche se disegnato su scala logaritmica

[Dimostrare preliminarmente che $\log f(x)$ è convessa se e solo se $ff'' - (f')^2 \geq 0$, applicando tale risultato a $g(y) = f(e^{-y})$].

123) Dimostrare che se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e per ogni n e ogni x $f^{(n)}(x) \geq 0$ allora $f(x)$ è analitica, cioè è sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno di ogni punto

124) Trovare la distanza fra il punto $A = (0,1)$ e la ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

125. (Disuguaglianza di Jensen). Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é convessa, mostrare che:

$$f\left(\int_0^1 g(t)dt\right) \le \int_0^1 f(g(t))dt$$

se $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ é continua.
Mostrare che la proprietá data) vale solo per le funzioni convesse, più precisamente: se f è una funzione continua tale che sia soddisfatta la disuguaglianza precedente per ogni g continua, allora necessariamente f è convessa.

126. Dati due numeri reali strettamente positivi a, b, definiamo $M^r(a,b) = (\frac{a^r+b^r}{2})^{1/r}$ per ogni $r \neq 0$, si ha che M^r é crescente con r. Determinare $\lim_{r\to 0} M^r$, $\lim_{r\to -\infty} M^r$, $\lim_{r\to +\infty} M^r$.

127. Sia p un polinomio di grado n: $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Se p ha n radici reali e distinte, allora

$$(n-1)a_{n-1}^2 \ge 2na_n a_{n-2}.$$

128. Sia $f(x) = x^\alpha : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$. Mostrare che f é una funzione $\alpha-$ hölderiana, cioé soddisfa questa proprietá:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \le C$$

per ogni x, y, con C costante indipendente da x, y.

129. Una particella in un secondo percorre un km. partendo da ferma ed arrivando con velocitá nulla. Mostrare che in qualche punto ha accelerazione $\ge 4\ \frac{km}{s^2}$. (É sottinteso che il moto é descritto da una funzione di classe C^2 rispetto il tempo).

130. a) $x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \ge 0$ per ogni $x > 0$, se $\alpha \le 0$ oppure $\alpha \ge 1$
b) $x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \le 0$ per ogni $x > 0$, se $\alpha \in [0,1]$.
c) $a^{1/p}b^{1/q} \le a/p + b/q$ se $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$; $a, b > 0$
d) $a^{1/p}b^{1/q} \ge a/p + b/q$ se $1/p + 1/q = 1$, $p < 1$; $a, b > 0$.

131. (Disuguaglianza di Young) Sia $f : [0,a] \to [0, f(a)]$ continua, suriettiva e strettamente crescente. Indichiamo con f^{-1} la sua inversa, definita in $[0, f(a)]$. Mostrare che

$$ab \le \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy$$

per ogni $b \in [0, f(a)]$. Vale l' uguaglianza solo se $b = f(a)$.
Analizzare i seguenti casi particolari $f(x) = x^{p-1}$, $f(x) = \log(1+x)$.

132. (Disuguaglianze di Hölder-Minkowski). Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \ge 0$ allora
a)

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

se $p, q > 1$ e $1/p + 1/q = 1$.
Se $p < 1$ allora vale la disuguaglianza opposta.
L'uguaglianza vale se x_i^p é proporzionale a y_i^q.
b)

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

per $p > 1$. Se $p < 1$ la disuguaglianza si rovescia.

Esercizi per il Seminario Fisico-Matematico

133) Siano f_n delle funzioni delle funzioni derivabili da **R** a **R** tali che convergano, per ogni x fissato, ad una funzione f anch'essa derivabile. Mostrare che se $f'_n \geq 0$ per ogni n allora vale anche $f' \geq 0$. È necessario supporre che f sia derivabile ? Dimostrare il risultato analogo, quando sostituiamo alla derivata prima una derivata di ordine superiore.

134) Sia f una funzione derivabile n volte da **R** a **R**. Mostrare che se f e $f^{n)}$ sono limitate allora anche tutte le derivate $f^{h)}$ (per $h = 1, 2, \ldots, n-1$) sono anch'esse limitate.

135) Definiamo le funzioni simmetriche elementari nel seguente modo:

$$p_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i1<i2<\ldots<ih} \frac{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x i_h}{\binom{n}{h}}$$

$-x_{i_h}$

Si dimostri che quando $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con x_i tutte positive, allora

$$(p_h(x))^{1/h} \geq (p_{h+1}(x))^{1/(h+1)}$$

136) Sia f una funzione continua definita in un disco di $\mathbf{R}^2$ a valori in **R**. Si dimostri che l'equazione $f(x) = f(-x)$ ha infinite soluzione.

137) Sia f una funzione definita in $[0, \pi]$ a valori reali e tale che $f(0) = 0$. Mostrare che

a) se esiste f'' ed è negativa allora

$$f(x) + f(y) > f(x+y)$$

b) se esiste ed è negativa la derivata terza, e vale $f(x) + f(\pi - x) = f(\pi)$, allora vale la stessa tesi del caso a)

c) se esiste la derivata quarta ed è positiva allora, se $f(x) = f(\pi - x)$, vale

$$f(x) + f(y) + f(z) + f(x+y+z) < f(x+y) + f(x+z) + f(y+z)$$

(per esempio la funzione sin soddisfa questa diseguaglianza).