prova scritta del 3/4/2009

TEMPO A DISPOSIZIONE: 90 minuti

[redacted]
(Cognome)

[redacted]
(Nome)

[redacted]

[redacted]
(Numero di matricola)

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ sia $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e r la retta passante per A e B.

MARCO

[redacted]

(i) il punto $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in r$?

SI

(ii) Il piano di equazione $\{x_1 + x_2 + x_3 = 5\}$ contiene la retta r ?

NO

(iii) Determinare l'equazione di un piano perpendicolare alla retta r e passante per A.

$x + y + 2z - 3 = 0$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ sia Π il piano passante per i punti A, B e C seguenti: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(i) il punto $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Pi$?

SI

(ii) Determinare un vettore perpendicolare a Π : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(iii) Dato Π' Il piano di equazione $\{x_1 + x_2 + x_3 = -1\}$ determinare una descrizione parametrica della retta $r = \Pi \cap \Pi'$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 - t \\ x_3 = t \end{cases}$$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ sia Q la quadrica di equazione $\{2xy + z^2 = 1\}$ e sia Π il piano di equazione $\{x + y - z = 0\}$

(i) Classificare la quadrica Q:

IPERBOLOIDE IPERBOLICO o A UNA FALDA

(ii) Classificare la conica $Q \cap \Pi$:

Iperbole (non degenere)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ sia $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, e Π il piano di equazione $\{x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}$.

(i) La distanza di A da Π è : $\boxed{2}$

(ii) Determinare l'equazione di una sfera con centro in A e tangente al piano Π:

$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2z + 13 = 0$

$((x-4)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^2$ sia $\mathcal{F}$ il fascio di coniche passanti per $A = (1, 2)$ $B = (-1, 2)$, $C = (2, 4)$, $D = (-2, 4)$

(i) Esiste una parabola $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$? SI $k = -1/9$ (ii) Esiste una circonferenza $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$? SI $k = -\frac{5}{13}$

(iii) In caso di risposta affermativa determinarne almeno un' equazione relativa

PARABOLA $4x^2 - 6y + 8 = 0$

CIRCONFERENZA $2x^2 + 2y^2 - 15y + 20 = 0$

Esercizio 6. Al variare del parametro reale t si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + tx_2 + x_3 = 1 \\ tx_1 + x_2 - tx_3 = 1 \\ x_1 + tx_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

(i) Il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se : $\boxed{t \neq \pm 1}$

(ii) Il sistema ammette infinite soluzione se e solo se : $\boxed{t = -1}$

(iii) Il sistema non ammette alcuna soluzione se e solo se : $\boxed{t = 1}$

Esercizio 7. I seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sono linearmente INDIPENDENTI ? $\boxed{\text{NO}}$

Esercizio 8. In $\mathbb{P}^2$ sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione $\{x^2 + y^2 - 2z^2 = 0\}$, sia r la retta di equazione $\{x + y - 5z = 0\}$ e sia Q il punto di coordinate omogenee $Q = (4, 4, 1)$

(i) Determinare l'equazione della retta polare di Q rispetto a $\mathcal{C}$:

$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

$2x + 2y - 1 = 0$

(i) Determinare le coordinate del punto polare di r rispetto a $\mathcal{C}$:

POLO $= (2, 2, 5)$ o $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$

Ingegneria Edile - Corso di geometria - anno accademico 2008/2009

prova scritta del 21/5/2009
TEMPO A DISPOSIZIONE: 90 minuti

[redacted] (Cognome) MARCO [redacted] (Nome) [redacted] (Numero di matricola)

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la retta r passante per A e B.

[redacted]

(i) il punto $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in r$? | ~~vero~~ | falso |

(ii) Il piano di equazione $\{x_1 - 2x_2 + x_3 = 2\}$ contiene la retta r ? | vero | ~~falso~~ |

(iii) Determinare l'equazione di un piano perpendicolare alla retta r e passante per A.

$\pi)\quad x_1 - x_3 = 0$

(iv) Data la retta s di equazioni $\begin{cases} x_1 \quad\quad -x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Determinare la posizione reciproca (coincidenti, parallele non coincidenti, incidenti, sghembe) della coppia di rette r e s.

INCIDENTI

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ sia Π il piano passante per i punti A, B e C seguenti: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(i) il punto $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Pi$? | ~~vero~~ | falso |

(ii) Determinare un vettore perpendicolare a Π : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ sia Q la quadrica di equazione $\{2x^2 + 2xy + 5y^2 + z^2 = 1\}$ e sia Π il piano di equazione $\{z = 0\}$

(i) Classificare la quadrica Q: ELLISSOIDE REALE

(ii) Classificare la conica $Q \cap \Pi$: ELLISSE REALE

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ sia $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e Π il piano di equazione $\{x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$.

(i) La distanza di A da Π è : $\boxed{0 ;\ A \in \pi}$

(ii) Determinare un' equazione parametrica di una retta perpendicolare al piano Π e passante per A:

$$r) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^2$ si consideri il seguente il fascio di coniche $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \{x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 6y - 1 = 0\}$$

(i) Esiste una parabola $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$? | ~~vero~~ | falso | (ii) Esiste una circonferenza $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$? | ~~vero~~ | falso |

(iii) Determinare l'equazione di una conica del fascio $\mathcal{F}$ passante per il punto $(1, 2)$

$$x^2 - 8xy + y^2 + 6y - 1 = 0$$

Esercizio 6. Al variare del parametro reale t si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} tx_1 \quad\quad +tx_3 = 3 \\ tx_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

(i) Il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se : $\boxed{t \neq 0} \wedge t \neq 3$

(ii) Il sistema ammette infinite soluzione se e solo se : $\boxed{t = 3}$

(iii) Il sistema non ammette alcuna soluzione se e solo se : $\boxed{t = 0}$

Esercizio 7. I seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ sono linearmente INDIPENDENTI | vero | ~~falso~~ |

Esercizio 8. In $\mathbb{P}^2$ sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione $\{x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 0\}$, sia r la retta di equazione $\{x + y - 5z = 0\}$ e sia Q il punto di coordinate omogenee $Q = (3, 4, 1)$

(i) Determinare l'equazione della retta polare di Q rispetto a $\mathcal{C}$: $\boxed{3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0}$

(i) Determinare le coordinate del polo di r rispetto a $\mathcal{C}$: $\boxed{\left(\frac{2}{5} ; \frac{1}{5} ; 1\right)}$