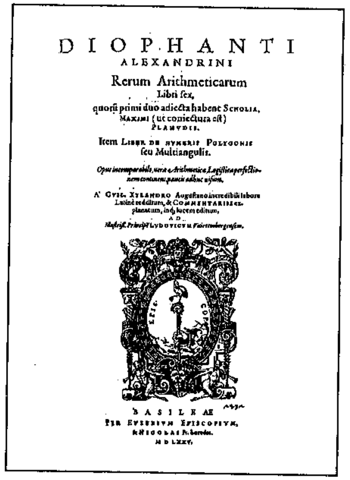
IV. Numeri Complessi

Come già detto il processo di formazione dei sistemi numerici è stato piuttosto lento. A differenza di Erone ed Archimede che in qualche senso accettarono quantità irrazionali pur accontentandosi di approssimarle, Diofanto di Alessandria (III sec. d. C.) ad esempio riteneva che equazioni con soluzioni, in termini moderni, irrazionali o complesse non fossero risolubili. È solo nel quindicesimo secolo che i numeri negativi vengono accettati come soluzioni di equazioni algebriche, e nel sedicesimo secolo che i numeri complessi fanno la loro apparizione, con Gerolamo Cardano (1501-1576) e Raffaele Bombelli (c.a. 1530-1572), nella risoluzione delle equazioni algebriche, come numeri *surdi*, che è conveniente usare perché a volte portano a risultati reali corretti. Ma Descartes considera le radici complesse come "immaginarie". E malgrado fossero usati da Jacob Bernoulli (1759-1789) per integrare funzioni razionali, da Leonhard Euler (1707-1783) che definisce correttamente il logaritmo complesso, essi vengono per così dire accettati dopo che Carl Friedrich Gauss (1777-1855) nel 1799 dà la prima dimostrazione del *teorema fondamentale dell'algebra* (seguendo ricerche precedenti di Eulero, Jean Baptiste D'Alembert (1717–1783) e Giuseppe Luigi Lagrange (1736–1813)), le funzioni di variabile complessa si dimostrano utili nel trattare l'equazione del potenziale in idrodinamica e quindi in elettromagnetismo, e si riconosce il loro significato geometrico. Nel 1837 William Rowen Hamilton (1805-1865) dà una definizione formale dei numeri complessi, essenzialmente quella moderna di coppie di reali con cui si opera opportunamente, che fa a meno della piuttosto misteriosa unità immaginaria $\sqrt{-1}$.

Figura 0.1. Gerolamo Cardano (1501-1576)


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
Rerum Arithmeticarum
Libri sex,
quorū primi duo adiecta habent Scholia,
Maximi (ut coniectura est)
Planudis.
Item Liber de numeris Polygonis
seu Multiangulis.
BASILEAE
Per Eusebium Episcopium,
& Nicolai F. haeredes.
MDLXXV.

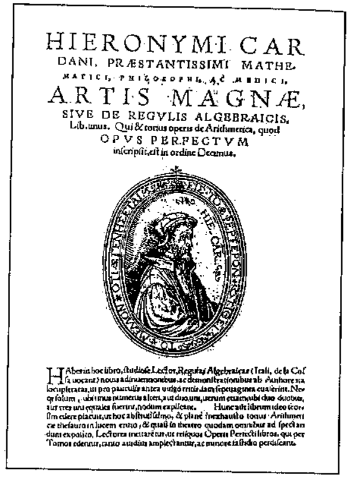

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Figura 0.2. Il *Rerum arithmeticarum* di Diofanto di Alessandria (III sec. d. C.) e l'*Ars Magna* di Gerolamo Cardano (1501-1576).

1 Numeri complessi

Come abbiamo brevemente accennato l'introduzione dei numeri complessi passa attraverso il loro uso in vari problemi algebrici e differenziali, ed il loro significato geometrico. Una motivazione elementare, ma a posteriori, è che essi permettono di risolvere tutte le equazioni algebriche, ad esempio l'equazione $x^2+1=0$ non è risolubile in $\mathbb{R}$, ma lo è in $\mathbb{C}$.

1.1 Il sistema del numeri complessi

Piano di Gauss

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è il *piano di Gauss*, i.e. il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con le operazioni di somma e prodotto definite da

$$(a,b)+(c,d):=(a+c,b+d) \qquad (a,b)\cdot(c,d):=(ac-bd,ad+bc).$$

Se si identifica l'asse delle ascisse con $\mathbb{R}$ in modo che $(0,0)=0$, $(1,0)=1$ e si introduce l'*unità immaginaria* i per indicare il vettore $(0,1)$ si ha $i^2=i\cdot i=-1$, la formula del parallelogramma permette di scrivere

$$z=(a,b)=a(1,0)+b(0,1), \text{ equivalentemente } z=a+ib,$$

e il prodotto di numeri complessi diventa

$$(a+ib)(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=(ac-bd)+i(ad+bc).$$

Si verifica facilmente che gli assiomi di $\mathbb{R}$ (A), (M), (AM) relativi alla somma ed al prodotto continuano a valere per $\mathbb{C}$ con elemento neutro per la somma $0+i0=0$, elemento neutro per il prodotto $1+i0=1$ e inverso di $x+iy$ dato da

$$\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

$\mathbb{C}$ è dunque un *corpo commutativo* e $\mathbb{R}=\{x+iy\in\mathbb{C}\,|\,y=0\}$ è un *sottocorpo di* $\mathbb{C}$.

Non è invece possibile introdurre in $\mathbb{C}$ un ordine che lo faccia diventare un corpo commutativo ordinato. Infatti in caso contrario si avrebbe o $i>0$ o $i<0$, non potendo essere $i=0$ perché $0\in\mathbb{R}$ mentre $i\notin\mathbb{R}$. Ma in entrambi i casi si dedurrebbe allora $-1=i^2>0$ il che è assurdo. Per questa ragione *non ha senso scrivere diseguaglianze tra numeri complessi.*

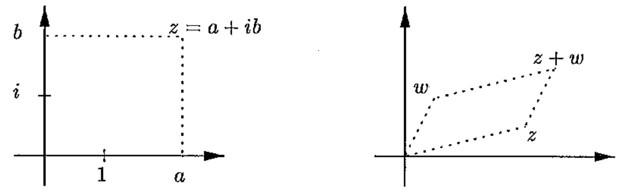


Figura 1.1. Somma di numeri complessi.

Coniugato

Se $z:=a+ib\in\mathbb{C}$, a e b si chiamano rispettivamente la *parte reale*, la *parte immaginaria* di z e il *coniugato* di z

$$a=\Re z, \qquad b=\Im z, \qquad \overline{z}:=a-ib=\Re z-i\Im z.$$

Dunque $\Re\overline{z}=\Re z$ e $\Im\overline{z}=-\Im z$. Perciò $\overline{z}$ è il simmetrico di z rispetto all'asse reale. Il simmetrico di z rispetto all'asse immaginario è $-\overline{z}$ ed il simmetrico di z rispetto all'origine è $-z$. Infine

$$\Re z=\frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \Im z=\frac{z-\overline{z}}{2i},$$

in particolare $z\in\mathbb{R}$ se e solo se $z=\overline{z}$, z è puramente immaginario se e solo se $z=-\overline{z}$; inoltre valgono ovviamente

$$\overline{\overline{z}}=z, \qquad \overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}, \qquad \overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w},$$

$$\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}=\frac{1}{\overline{w}}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}} \qquad \text{se } w\neq 0.$$

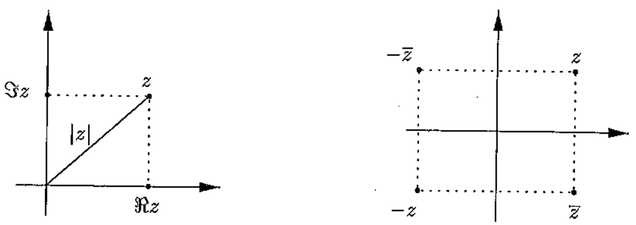


Figura 1.2. (a) $\Re z$, $\Im z$, $|z|$, (b) Posizioni relative di $\pm z$, $\pm\overline{z}$.

Modulo di un numero complesso

Il *modulo di* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ è il numero reale (non negativo)

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}.$$

Nel piano di Gauss $|z|$ è la distanza di z dall'origine e coincide con il modulo in $\mathbb{R}$ se z è reale. Ovviamente il modulo verifica le proprietà della distanza

(i) $|z| \geq 0$, $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$,
(ii) (*Proprietà triangolare*): $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Inoltre

$$|z|^2 = z\overline{z}, \qquad |zw| = |z|\,|w|, \qquad |\overline{z}| = |z|, \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad \text{se } w \neq 0,$$
$$|\Re z| \leq |z|, \qquad |\Im z| \leq |z|, \qquad \big|\,|z| - |w|\,\big| \leq |z - w|.$$

Forma trigonometrica: il piano di Argand

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Indicato con θ l'angolo compreso tra il semiasse positivo reale e la semiretta per 0 e z, allora

$$a = |z|\cos\theta \qquad b = |z|\sin\theta \tag{1.1}$$

e dunque

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{1.2}$$

È la *forma trigonometrica* o *polare* di z; $(|z|, \theta)$ sono le *coordinate polari* del punto (a, b). Si noti che θ è determinato da z a meno di multipli interi di 2π: sono gli *argomenti di* z. Un qualsiasi valore tra questi si chiama una *determinazione dell'argomento di* z.

Volendo esprimere θ come funzione di z, si sceglie un intervallo ampio 2π con cui misurare gli angoli e si parla della scelta di una *determinazione dell'argomento*. Una scelta possibile è $\theta \in [0, 2\pi[$ e $\theta(1) = 0$, la *determinazione principale*. Ovviamente possiamo scegliere una qualunque altra determinazione, ad esempio è di uso comune in molte applicazioni la scelta $\theta \in [-\pi, \pi[$ e $\theta(1) = 0$, i.e. se $z = x + iy$,

$$\theta(x,y) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0,\ y > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & \text{se } x < 0,\ y \leq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

L'insieme degli argomenti di z viene spesso indicato con $\operatorname{Arg} z$, e $\operatorname{Arg} z$ va vista come funzione a più valori (infatti infiniti), mentre se si fissa una determinazione si usa indicare questa con $\arg z$. Nel caso della determinazione principale arg va intesa come funzione da $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in $[0, 2\pi[$, mentre, nel caso della determinazione $\theta \in [-\pi, \pi[$, essa va intesa coma funzione sempre da $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma in $[-\pi, \pi[$. Quale (e se si sceglie una) determinazione risulterà chiaro nel contesto.

Osserviamo infine che la funzione $\arg z$ è "continua" in $\mathbb{C} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{C} \mid x > 0\}$ e "discontinua" sull'asse reale positivo se $\arg z$ è la determinazione principale, mentre è "continua" in $\mathbb{C} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{C} \mid x < 0\}$ e "discontinua" sull'asse reale negativo se $\arg z$ è la determinazione $\theta \in [-\pi, \pi[$.

Prodotto di numeri complessi e rotazioni

La forma trigonometrica dei numeri complessi permette di formulare ed interpretare in modo semplice il prodotto di numeri complessi

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{e} \quad w = r(\cos\eta + i\sin\eta).$$

Abbiamo infatti, tenendo conto delle formule di addizione del seno e del coseno,

$$\begin{aligned} zw &= \rho r[(\cos\theta\cos\eta - \sin\theta\sin\eta) + i(\cos\theta\sin\eta + \cos\eta\sin\theta)] \\ &= \rho r[\cos(\theta + \eta) + i\sin(\theta + \eta)]. \end{aligned}$$

Cioè zw ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti. In particolare moltiplicare un numero z per un numero complesso $w = |w|(\cos\eta + i\sin\eta)$, significa dilatare il vettore $z = (a, b)$ di un fattore $|w|$ e ruotarlo in senso antiorario di un angolo η (modulo 2π). In particolare iz è il ruotato di z di $\pi/2$ in senso antiorario.

Formula di de Moivre

Dalla formula sul prodotto di due numeri complessi ricaviamo immediatamente che, se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, allora $z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ e più in generale per ogni $n \in \mathbb{N}$ la *formula di de Moivre*

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \tag{1.3}$$

Esponenziale complesso

Posto $f(\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, dalla formula del prodotto di numeri complessi si ricava che

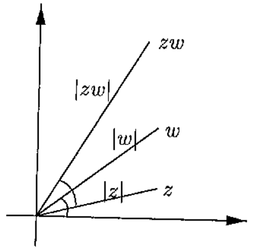


Figura 1.3. Moltiplicazione di numeri complessi.

$$f(\theta_1)f(\theta_2) = f(\theta_1 + \theta_2) \qquad \forall \theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{R},$$

formula analoga a quella che intercorre fra le potenze reali $a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$. Definiamo dunque, per ragioni per ora formali, l'*esponenziale complesso* e^z come la funzione $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da

$$e^z = \exp(z) := e^{\Re z}(\cos \Im z + i \sin \Im z), \tag{1.4}$$

dove e è il *numero di Nepero.* È subito visto che si ha

$$\begin{aligned} &e^z e^w = e^{z+w} \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{C} \\ &|e^z| = e^{\Re z} \\ &\exp(i(y + 2k\pi)) = \exp(iy). \end{aligned}$$

Quest'ultima proprietà si esprime tramite la

1.1. Proposizione. *L'esponenziale complesso è una funzione periodica di periodo* $2\pi i$, *i.e.,*

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Ovviamente se z è reale, l'esponenziale complesso e l'esponenziale reale in base e coincidono. La novità sta nella posizione

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta,$$

formula che permette una scrittura più breve di un numero complesso in forma polare come

$$z = |z|\, e^{i \arg z}.$$

Si ha poi per $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

dalle quali si ricavano le *formule di Eulero:*

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad e^{i\pi} + 1 = 0.$$

1.2 Radici n-sime.

Dalla formula di de Moivre si ricava anche

1.2. Proposizione. *Sia* $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. *L'equazione* $z^n = w$ *ha esattamente* n *radici distinte date da*

$$z_k := |w|^{1/n} \exp\Big(i \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}\Big) \qquad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{1.5}$$

Dimostrazione. Se z è soluzione di $z^n = w$, allora

$$|z|^n = |w| \quad \text{e} \quad \operatorname{Arg} z^n = \operatorname{Arg} w.$$

Dalla prima relazione ricaviamo $|z| = |w|^{1/n}$. Dalla seconda relazione, tenendo conto che $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z$, ricaviamo

$$\operatorname{Arg} z = \frac{\operatorname{Arg} w + 2k\pi}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Osservando che i valori in $\operatorname{Arg} z$ corrispondenti a $k = 0, 1, \dots, n-1$ sono i soli in $[0, 2\pi[$ e sono distinti, concludiamo che z deve essere necessariamente uno degli z_k. Si verifica poi immediatamente che tutti gli z_k sono soluzioni di $z^n = w$. □

Le n soluzioni $z_0, z_1, \dots z_{n-1}$ dell'equazione $z^n = w$ in (1.5) si chiamano le *radici n-sime complesse* (o *algebriche*) *di* w.

La proposizione in 1.2 si applica ovviamente anche a $w = a \in \mathbb{R}$. Se $a > 0$, si ha $a = |a| = |a| \exp(i \cdot 0)$, quindi

$$\sqrt[n]{a} = |a|^{1/n} \exp\Big(i \frac{2\pi k}{n}\Big) \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Se $a < 0$, si ha $a = |a| \exp(i\pi)$, quindi

$$\sqrt[n]{a} = |a|^{1/n} \exp\Big(i \frac{(2k+1)\pi}{n}\Big) \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

In particolare, se $a > 0$ ritroviamo la radice aritmetica $a^{1/n}$ per $k = 0$, e se n è pari, per $k = n/2$, troviamo ancora

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}(\cos\pi + i \sin\pi) = -a^{1/n},$$

cioè due delle n radici complesse sono reali. Se $a < 0$ e n è dispari $n = 2h + 1$, allora per $k = h$ si ha ancora

$$\sqrt[n]{a} = |a|^{1/n}(\cos\pi + i \sin\pi) = -|a|^{1/n},$$

cioè una delle radici complesse è reale.

Si noti infine che per ogni $k = 0, \dots, n-1$ l'argomento di z_k si ottiene dall'argomento di z_{k-1} aggiungendo $2\pi/n$. Le radici di un numero complesso w, sono dunque i vertici di un poligono regolare a n-lati inscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio $|w|^{1/n}$.

Numeri complessi

Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Si pone

$$\Re z := x, \qquad \Im z := y, \qquad |z| := \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \overline{z} := x - iy,$$

e si definisce l'*esponenziale complesso* come

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y).$$

In particolare si trova che

$$z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

e le *formule di Eulero*

$$\cos y := \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \qquad e^{i\pi} + 1 = 0.$$

I numeri complessi si scrivono anche in coordinate polari. Per $z \neq 0$, se $\arg z$ è l'angolo misurato in senso antiorario e in radianti tra la semiretta per $(0,0)$ e z e il semiasse positivo delle ascisse, allora

$$z := |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z) = |z| e^{i \arg z}$$

e valgono le *formule di de Moivre*

$$z^n = |z|^n(\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z)),$$

In particolare

$$(\cos y + i \sin y)^n = \cos(ny) + i \sin(ny), \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Radici n-sime

Proposizione. *Per ogni $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ e $n \geq 1$, l'equazione $z^n = w$ ha esattamente n radici distinte*

$$z_k := |w|^{1/n} \exp\Big(i \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}\Big) \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

In particolare le n radici dell'unità $z^n = 1$ sono i numeri

$$\omega_j := \exp\Big(i \frac{2\pi j}{n}\Big), \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad \text{e si ha} \quad \omega_j = (\omega_1)^j.$$

Le n radici complesse di $w \neq 0$ si possono riscrivere come

$$z_1,\ z_1\omega,\ z_1\omega^2, \dots,\ z_1\omega^{n-1}, \qquad z_1 := |w|^{1/n} \exp(i \arg(w)/n).$$

Radici dell'unità

La proposizione in 1.2 si applica ovviamente anche alle radici dell'unità. Precisamente $z^n = 1$ se e solo se z è uno dei numeri

$$\omega_{n,k} := \exp\Big(i \frac{2\pi k}{n}\Big), \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Se ω è la prima radice n-sima dell'unità, $\omega = \omega_{n,1} = \exp(i2\pi/n)$, allora le radici dell'unità sono

$$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3, \dots, \omega^{n-1}$$

e evidentemente $\omega^n = 1$.

Si può allo stesso modo esprimere le radici n-sime di un numero complesso w. Infatti se $z_1 := |w|^{1/n} \exp(i2\pi(\arg w)/n)$, allora le n radici complesse di w nella (1.5) si riscrivono come

$$z_1,\ z_1\omega,\ z_1\omega^2, \dots,\ z_1\omega^{n-1}.$$

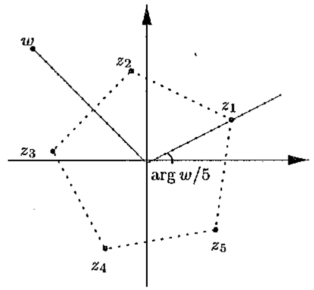


Figura 1.4. Radici quinte di un numero complesso.

1.3 Logaritmo complesso

Dato un numero complesso $z \neq 0$, ogni $w \in \mathbb{C}$ tale che $e^w = z$ si chiama *logaritmo naturale di z*. Si verifica facilmente

1.3. Proposizione. *Tutti i logaritmi naturali di z sono dati da*

$$w_k := \log|z| + i(\arg z + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$