VERIFICA DELLE IPOTESI

$X_1, \dots X_n$ campione statistico con legge dipendente da un parametro ϑ ignoto.

1. Preparazione del test 2. Utilizzo dei dati

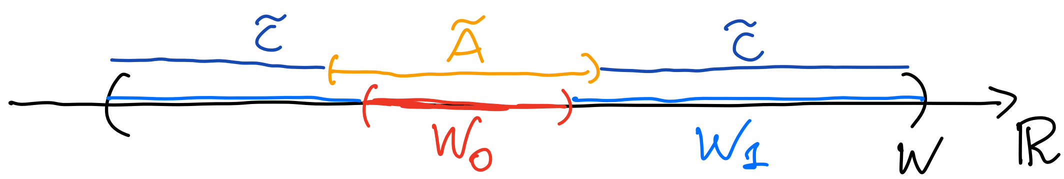
1. Test.

$$\vartheta \in W \subseteq \mathbb{R} \quad [\mu \in \mathbb{R}, \ \sigma^2 \in \mathbb{R}_+, \ p \in (0,1)]$$

"Ipotesi nulla" $H_0)$ $\vartheta \in W_0 \subset W$

$$[\mu = \mu_0, \ W_0 = \{\mu_0\}; \ \mu \geq \mu_0, \ W_0 = [\mu_0, +\infty)]$$
$$\mu \leq \mu_0, \ W_0 = (-\infty, \mu_0]$$

"Alternativa" $H_1)$ $\vartheta \in W_1 := W \setminus W_0$



Definiamo due eventi $C, A \subset \Omega$ universo

$$[X_k : \Omega \to \mathbb{R}]$$

regione critica

$$C = \{\omega \in \Omega \ / \ g(X_1, \dots X_n)(\omega) \in \tilde{C} \subset W_1\}$$

regione accettazione

$$A = \{ \omega \in \Omega \,/\, g(X_1, \dots X_n)(\omega) \in \tilde{A} \supset W_0 \}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{C} = W$$

ERRORI

I SPECIE

Rifiutare l'ipotesi quando invece è verificata

$\downarrow$

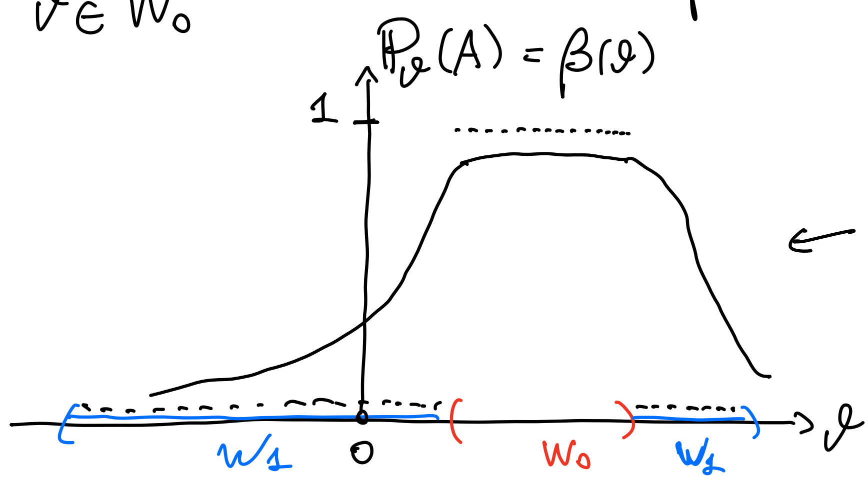
Voglio che $\mathbb{P}_\vartheta(C)$ sia piccola se $\vartheta \in W_0$

II SPECIE

Accettare l'ipotesi quando invece non è verificata

$\downarrow$

Voglio che $\mathbb{P}_\vartheta(A)$ sia piccola quando $\vartheta \in W_1$



ricerca del compromesso

Def Si chiama LIVELLO DEL TEST un numero $\alpha \in (0,1)$ t.c. $\mathbb{P}_\vartheta(C) \leq \alpha \quad \forall \vartheta \in W_0$

Def La funzione $W \ni \vartheta \longmapsto \mathbb{P}_\vartheta(A)$ si indica con $\beta(\vartheta) := \mathbb{P}_\vartheta(A)$ e si chiama CURVA OPERATIVA

Si chiama POTENZA DEL TEST la funzione

$$W_1 \ni \vartheta \longmapsto P_\vartheta(C) = (1-\beta(\vartheta))$$

2. Utilizzo dei dati

- accettare o no l'ipotesi ad un certo livello

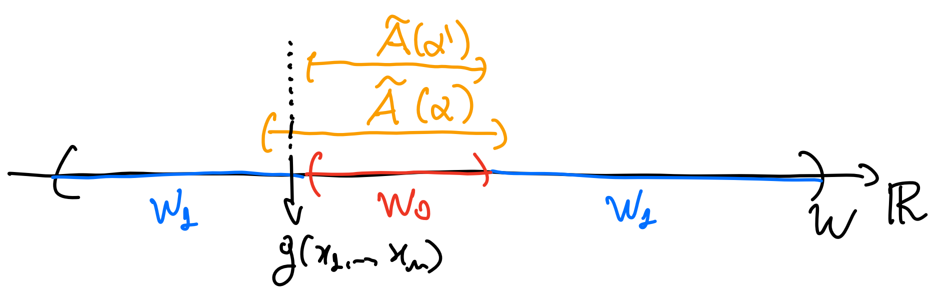
l'ipotesi è accettata al livello α se

$$g(x_1, \dots, x_n) \in \tilde{A}$$ $\boxed{\Leftrightarrow \ \omega \in A \ \text{dei dati} \ [X_i(\omega) = x_i]}$

- determinare il p-value (p dei dati)

Def Si chiama p-VALUE il valore $\bar{\alpha}$ t.c.

se $\alpha < \bar{\alpha}$ allora l'ipotesi è accettata al livello α;
se $\alpha > \bar{\alpha}$ " " non è accettata al livello α.



$\alpha' > \alpha$

l'ipotesi è accettata al livello α ma non al livello α'.

• Test per la media di un campione gaussiano con varianza σ^2 nota.

$$X_1, \dots, X_n \quad , \quad X_k \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad , \quad \sigma^2 \text{ nota}$$

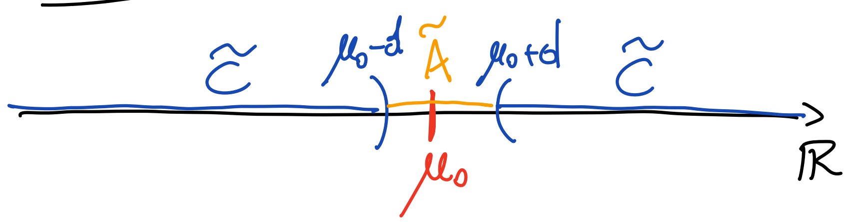
test per ipotesi su $\mu \in \mathbb{R}$

Test bilatero

$$H_0) \ \mu = \mu_0 \quad ; \quad H_1) \ \mu \neq \mu_0$$

Fissiamo $\alpha \in (0,1)$, e cerchiamo C t.c. $\underline{\mathbb{P}_{\mu_0}(C) = \alpha}$

<u>livello</u>



$$C = \{ \omega \in \Omega \ / \ |\overline{X}(\omega) - \mu_0| > d \}$$

Cerchiamo $d > 0$ t.c. $\mathbb{P}_{\mu_0}(|\overline{X} - \mu_0| > d) = \alpha$

Se $X_k \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ allora $\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$\mathbb{P}_{\mu_0}(|\overline{X} - \mu_0| > d) = \mathbb{P}_{\mu_0}\left(\Big| \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu_0)}_{\sim N(0,1)} \Big| > \frac{\sqrt{n}}{\sigma} d \right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right)$$

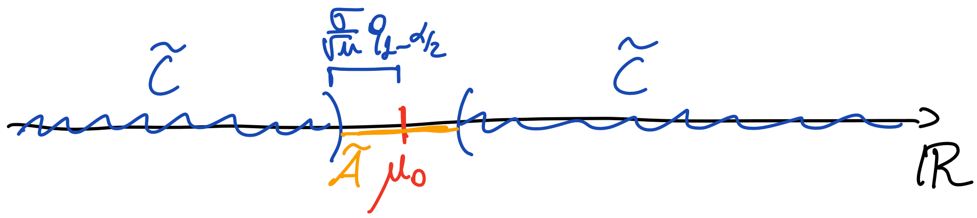
$$\mathbb{P}_{\mu_0}\left(Z > \frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right) + \mathbb{P}_{\mu_0}\left(Z < -\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right) = \mathbb{P}_{\mu_0}\left(|Z| > \frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right) \quad [Z \sim N(0,1)]$$

$$\Longrightarrow \quad 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right)\right) = \alpha \iff \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\right) = 1 - \alpha/2$$

$$\iff d = q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Per il test bilatero $H_0)\ \mu = \mu_0$ per la media di un campione gaussiano con varianza nota, al livello α la regione critica è

$$C = \left\{ |\overline{X} - \mu_0| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \right\}$$



regione accettazione
$$A = \left\{ |\overline{X} - \mu_0| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \right\}$$

- Curva operativa

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

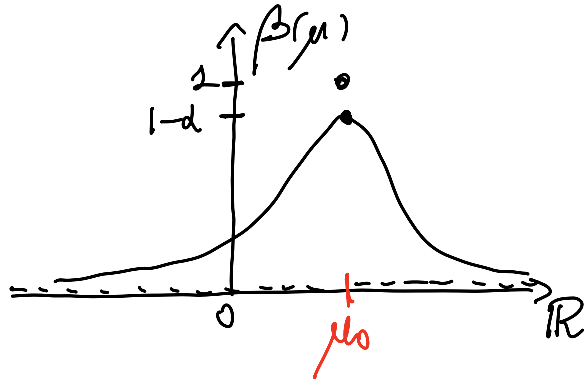
$$\mathbb{R} \ni \mu \longmapsto \beta(\mu) := \mathbb{P}_{\mu}(A) =$$

$$= \mathbb{P}_{\mu}\left(|\overline{X} - \mu_0| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}\right) =$$

$$= \mathbb{P}_{\mu}\left(\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \leq \overline{X} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}\right) =$$

$$= \mathbb{P}_\mu\left(\frac{\mu_0 - \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}}{\sigma/\sqrt{n}} \le \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu)}_{\sim N(0,1)} \le \frac{\mu_0 - \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}}{\sigma/\sqrt{n}} \right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu) + q_{1-\alpha/2} \right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0-\mu) - q_{1-\alpha/2} \right) = \beta(\mu)$$



$$\beta(\mu_0) = \mathbb{P}_{\mu_0}(A) = 1 - \mathbb{P}_{\mu_0}(C)$$
$$= 1-\alpha$$

$$\beta(\mu_0) = \Phi(q_{1-\alpha/2}) - \Phi(\underbrace{-q_{1-\alpha/2}}_{q_{\alpha/2}}) = 1 - \alpha/2 - \alpha/2 = 1-\alpha$$

Utilizzo dei dati. Avremo $x_1, \dots, x_n$ e calcoliamo

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,.$$

L'ipotesi $\mu = \mu_0$ è accettata al livello α se e solo se $|\overline{x} - \mu_0| \le \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}$ $\left(\Leftrightarrow \omega \in A \right)$ $\overline{x} = \overline{X}(\omega)$

<u>OSS</u> $|\overline{x} - \mu_0| \le \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \Leftrightarrow$

$$\mu_0 \in \left[\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \,,\; \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \right]$$

Calcoliamo il p-value. Troviamo $\bar{\alpha}$ t.c.

$\alpha < \bar{\alpha} \Rightarrow$ ipotesi accettata al livello α

$$|\bar{x} - \mu_0| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}$$

$\alpha > \bar{\alpha} \Rightarrow$ ipotesi non accettata al livello α

$$|\bar{x} - \mu_0| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}$$

$\Rightarrow$ $\bar{\alpha}$ verifica $|\bar{x} - \mu_0| = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\bar{\alpha}/2}$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi\Big(\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{x} - \mu_0|}_{q_{1-\frac{\bar{\alpha}}{2}}} \Big) = 1 - \frac{\bar{\alpha}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\bar{\alpha} = 2 \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{x} - \mu_0| \right) \right]}$$